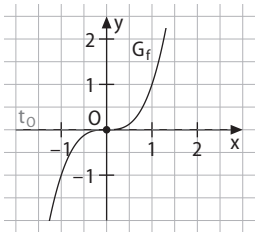
K1/6 **1** Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig: Wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, dann gilt $f'(x_0) < 0$ oder $f'(x_0) > 0$, d. h. der Graph von f ist dann streng monoton fallend bzw. steigend. Dann ist aber x_0 keine lokale Extremstelle.

Die Bedingung $f(x_0) = 0$ ist nicht hinreichend:

Beispiel: Für die Funktion f mit $f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, gilt $f'(x) = 3x^2$ und damit $f'(0) = 0$.

Der Graph von f hat aber an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Extrempunkt, sondern einen Terrassenpunkt.



K4/5 **2** **a) Ableitungen:** $f'(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$; $f''(x) = 6x^2 + 4x - 4$

Monotonie und Extremstellen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 1$

Monotonietabelle:

x	$x < -2$	$x_1 = -2$	$-2 < x < 0$	$x_0 = 0$	$x > 2$	$x_2 = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$f'(-3) = -24 < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f'(-1) = 4 > 0$ +	0 VZW von + nach –	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f'(2) = 16 > 0$ +
G_f	↘	$T_1(-2 \mid f(-2))$	↗	$H(0 \mid f(0))$	↘	$T_2(1 \mid f(1))$	↗

Wendestellen:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(3x^2 + 2x - 2) = 0$

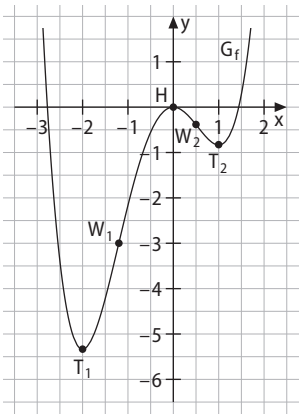
$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

ist jeweils einfache Nullstelle von f'' und damit Wendestelle von G_f.

Krümmungsverhalten:

x	$x < \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$	$x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$	$\frac{-1-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$
$f''(x)$	$f''(-2) = 12 > 0$ +	0 VZW von + nach –	$f''(0) = -4 < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f''(1) = 6 > 0$ +
G_f	linksgekrümmt	W_1	rechtsgekrümmt	W_2	linksgekrümmt

Zeichnung:



b) Ableitungen: $f'(x) = 3x^3 - 6x^2$; $f''(x) = 9x^2 - 12x$

Monotonie und Extremstellen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$

Monotonietabelle:

x	$x < 0$	$x_1 = 0$	$0 < x < 2$	$x_2 = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$f'(-1) = -9 < 0$ –	0 kein VZW	$f'(1) = -3 < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f'(3) = 27 > 0$ +
G_f	↘	Terrassenpunkt	↘	$T(2 \mid f(2))$	↗

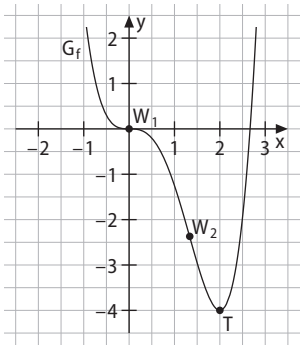
Wendestellen:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(3x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{4}{3}$ ist jeweils einfache Nullstelle von f'' und damit Wendestelle von G_f.

Krümmungsverhalten:

x	$x < 0$	$x_1 = 0$	$0 < x < \frac{4}{3}$	$x_2 = \frac{4}{3}$	$x > \frac{4}{3}$
$f''(x)$	$f''(-1) = 21 > 0$ +	0 VZW von + nach –	$f''(1) = -3 < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f''(2) = 12 > 0$ +
G_f	linksgekrümmt	W_1 Terassenpunkt	rechtsgekrümmt	W_2	linksgekrümmt

Zeichnung:



c) Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - x$; $f''(x) = x^2 - \frac{4}{3}x - 1$

Monotonie und Extremstellen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1;$

$x_2 = 0; x_3 = 3$

Monotonietabelle:

x	$x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < 0$	$x_2 = 0$	$0 < x < 3$	$x_3 = 3$	$x > 3$
$f'(x)$	$f'(-2) = -\frac{11}{12} < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{24} > 0$ +	0 VZW von + nach –	$f'(1) = -\frac{4}{3} < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f'(4) = \frac{20}{3} > 0$ +
G_f	↘	$T_1(-1 \mid f(-1))$	↗	$H(0 \mid f(0))$	↘	$T_2(3 \mid f(3))$	↗

Wendestellen:

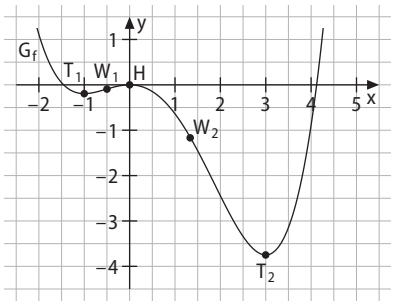
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{(\frac{4}{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{13}}{2} = \frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{13});$

$x_1 = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{13}); x_2 = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{13})$ ist jeweils einfache Nullstelle von f'' und damit Wendestelle von G_f.

Krümmungsverhalten:

x	$x < \frac{1}{3}(2-\sqrt{13})$	$x_1 = \frac{1}{3}(2-\sqrt{13})$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 = \frac{1}{3}(2+\sqrt{13})$	$x > \frac{1}{3}(2+\sqrt{13})$
$f''(x)$	$f''(-1) = \frac{4}{3} > 0$ +	0 VZW von + nach –	$f''(1) = -\frac{4}{3} < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f''(2) = \frac{5}{3} > 0$ +
G_f	linksgekrümmt	W_1	rechtsgekrümmt	W_2	linksgekrümmt

Zeichnung:



d) Ableitungen: $f'(x) = x^2 - 6x + 8$; $f''(x) = 2x - 6$

Monotonie und Extremstellen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 4$

Monotonietabelle:

x	$x < 2$	$x_1 = 2$	$2 < x < 4$	$x_2 = 4$	$x > 4$
$f'(x)$	$f'(1) = 3 > 0$ +	0 VZW von + nach –	$f'(3) = -1 < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f'(5) = 3 > 0$ +
G_f	↗	H (2 | f (2))	↘	T (4 | f (4))	↗

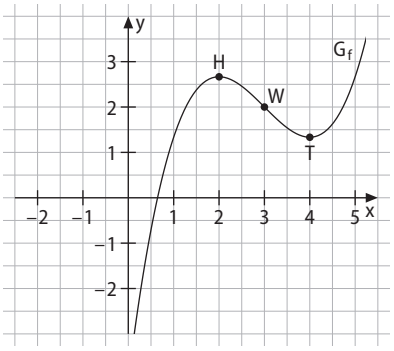
Wendestellen:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ ist einfache Nullstelle von f'' und damit Wendestelle von G_f.

Krümmungsverhalten:

x	$x < 3$	$x_1 = 3$	$x > 3$
$f''(x)$	$f''(2) = -2 < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f''(4) = 2 > 0$ +
G_f	rechtsgekrümmt	W (3 | f (3))	linksgekrümmt

Zeichnung:



K14 **3 a)** Die Aussage ist wahr, da G_f (mindestens) drei Stellen mit waagrechter Tangente besitzt.

b) Die Aussage ist für $x \to +\infty$ wahr, da sich G_f an die x-Achse anschmiegt und damit auch die Steigung von G_f für $x \to +\infty$ gegen null konvergiert.

c) Die Aussage ist wahr, da G_f an der Stelle $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente besitzt.

d) Die Aussage ist wahr. Im Hochpunkt bei $x_0 = 2$ ist der Graph rechtsgekrümmt. Da er sich für $x \to +\infty$ an die x-Achse anschmiegt, ist er dann linksgekrümmt. Somit muss es im Intervall $]2; +\infty[$ eine Stelle x_1 geben, für die $f''(x_1) = 0$ gilt.

K5/6 **4** **a)** $P(-1|1{,}5) \in G_f \Rightarrow f_{a,b}(-1) = 1{,}5 \Rightarrow$ (I) $b \cdot a^{-1} = 1{,}5$

$Q(3|24) \in G_f \Rightarrow f_{a,b}(3) = 24 \Rightarrow$ (II) $b \cdot a^3 = 24$

(II) : (I) $a^4 = 16 \Rightarrow a = \sqrt[4]{16} = 2$

Einsetzen in (I): $b = 1{,}5 \cdot 2 = 3$

$f_{2,3}(x) = 3 \cdot 2^x$

Der Graph $G_{f_{2,3}}$ ist streng monoton steigend auf R und es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{2,3}(x) = 0$ sowie $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{2,3}(x) = +\infty$.

b) $P\left(-2\left|\frac{1}{3}\right.\right) \in G_f \Rightarrow f_{a,b}(-2) = \frac{1}{3} \Rightarrow$ (I) $b \cdot a^{-2} = \frac{1}{3}$

$Q(2|27) \in G_f \Rightarrow f_{a,b}(2) = 27 \Rightarrow$ (II) $b \cdot a^2 = 27$

(II) : (I) $a^4 = 81 \Rightarrow a = \sqrt[4]{81} = 3$

Einsetzen in (I): $b = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3$

$f_{3,3}(x) = 3 \cdot 3^x$

Der Graph $G_{f_{3,3}}$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{3,3}(x) = 0$ sowie $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{3,3}(x) = +\infty$.

c) $P\left(-3\left|-\frac{1}{2}\right.\right) \in G_f \Rightarrow f_{a,b}(-3) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ (I) $b \cdot a^{-3} = -\frac{1}{2}$

$Q(1|-8) \in G_f \Rightarrow f_{a,b}(1) = -8 \Rightarrow$ (II) $b \cdot a^1 = -8$

(II) : (I) $a^4 = 16 \Rightarrow a = \sqrt[4]{16} = 2$

Einsetzen in (I): $b = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 = -4$

$f_{2,-4}(x) = -4 \cdot 2^x$

Der Graph $G_{f_{2,-4}}$ ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{2,-4}(x) = 0$ sowie $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{2,-4}(x) = -\infty$.

d) $P(-4|4) \in G_f \Rightarrow f_{a,b}(-4) = 4 \Rightarrow$ (I) $b \cdot a^{-4} = 4$

$Q\left(-1\left|\frac{1}{2}\right.\right) \in G_f \Rightarrow f_{a,b}(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (II) $b \cdot a^{-1} = \frac{1}{2}$

(II) : (I) $a^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Einsetzen in (I): $b = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

$f_{0{,}5;\,0{,}25}(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Der Graph $G_{f_{0{,}5;\,0{,}25}}$ ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$ und es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{0{,}5;\,0{,}25}(x) = +\infty$ sowie $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{0{,}5;\,0{,}25}(x) = 0$.

K5 **5** **a)** $\log_5 125 = x \Leftrightarrow x = \log_5 5^3 = 3$

b) $\log_x 512 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 512 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{512} = 8$

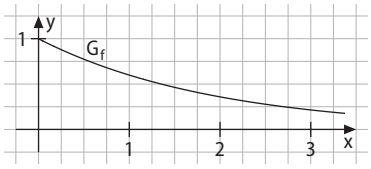
c) $3 \cdot 2^{x+1} = 48 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 16 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^4 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$

d) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x = 0 \Leftrightarrow 5^x \cdot (5^x - 4) = 0$

1 $5^x = 0$: Diese Gleichung hat keine Lösung.

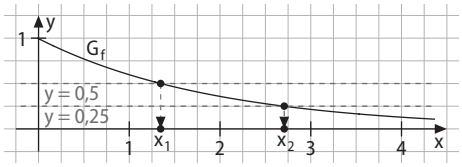
2 $5^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 5^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_5 4$

K2/3 **6** **a)** Möglicher Funktionsterm:
$f(x) = 100\,\% \cdot 0{,}6^x$ bzw. $f(x) = 0{,}6^x$

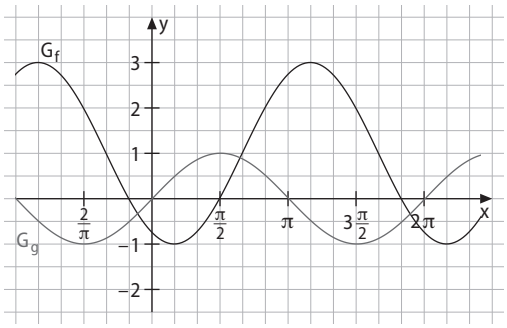


b) 1 $0{,}6^x = 0{,}5 \Leftrightarrow x_1 = \log_{0{,}6} 0{,}5 \approx 1{,}36$

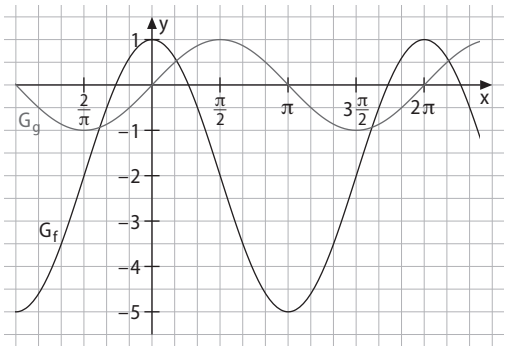
2 $0{,}6^x = 0{,}25 \Leftrightarrow x_2 = \log_{0{,}6} 0{,}25 \approx 2{,}71$



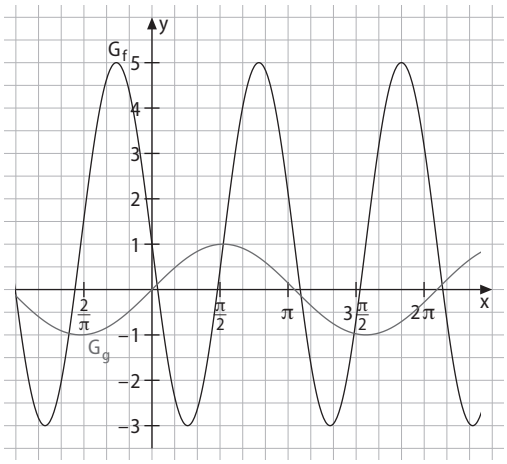
K4/6 **7** **a)** Mit $f(x) = a \cdot \sin[b(x - c)] + d$ gilt $c = -\frac{\pi}{3}$:
Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ Längeneinheiten in negative x-Richtung
$a = -2$: Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 und Spiegelung an der x-Achse
$d = 1$: Verschiebung um 1 Längeneinheit in positive y-Richtung



b) Mit $f(x) = a \cdot \sin[b(x - c)] + d$ gilt:
$f(x) = 3\cos x - 2 = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$
$c = -\frac{\pi}{2}$: Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ Längeneinheiten in negative x-Richtung
$a = 3$: Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3
$d = -2$: Verschiebung um 2 Längeneinheiten in negative y-Richtung



c) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$;
Spiegelung an der y-Achse
Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 4
Verschiebung um 1 Längeneinheit in positive y-Richtung



1 Stammfunktion, Produkt und Kettenregel

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schülerinnen und Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülerinnen und Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft in ihrem Leben vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K6 ■ Individuelle Lösungen, z. B. Erhöhung der Menge der Treibhausgase in der Atmosphäre durch Verbrennung fossiler Brennstoffe, Abholzung von Wäldern

K1/4 ■ Individuelle Lösungen: Nur der dunkelblaue Graph der Temperaturkurve hält die 1,5°-Grenze ein.

K4/6 ■ Mögliche Lösung: Die Funktionen konvergieren für große Werte von t, ganzrationale Funktionen divergieren für $t \to +\infty$.

K4/6 ■ Mögliche Lösung: Um den Zeitpunkt der stärksten Temperatursteigung zu ermitteln, muss man in allen Punkten des Graphen eine Tangente legen und an diesen die Steigung messen. Um den größten Anstieg rechnerisch zu bestimmen, könnte man den Funktionsterm ableiten, um dann von der nun erhaltenen Ableitungsfunktion das Maximum und somit den größten Wert der Steigung der Ausgangsfunktion zu berechnen.

Ausblick

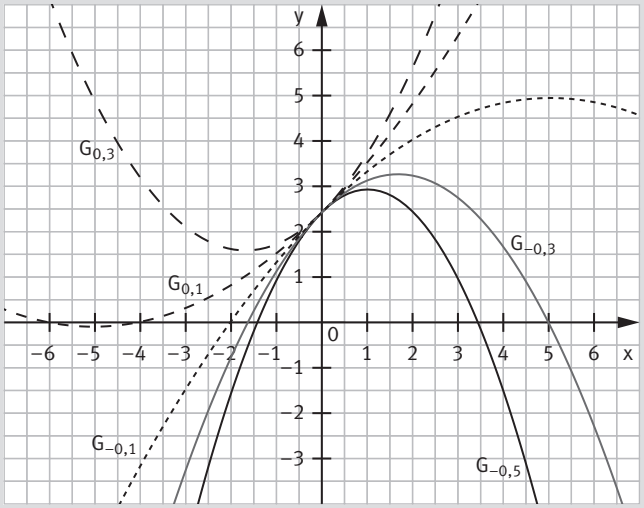
Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Lernende und Lehrkräfte. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Lernende und Lehrkräfte auf das Kommende einstellen. Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Entdecken

K1/5
- $f_a(0) = 2{,}4$ unabhängig von a.
  $f'_a(x) = 2ax + 1$; $f'_a(0) = 1$ unabhängig von a.
  Damit ergibt sich ein Abwurfwinkel von 45° (unabhängig von a).

K1/4
- a muss negativ sein, da eine Wurfparabel aufgrund der Erdanziehung immer nach unten geöffnet ist.

K5/6
- 4,025 m in horizontaler Richtung vom Abwurfpunkt entfernt muss der Ball eine Höhe von 3,05 m haben, d. h. es gilt $f_a(4{,}025) = 3{,}05$.
  Damit ergibt sich:
  $4{,}025^2a + 4{,}025 + 2{,}4 = 3{,}05$
  $\Rightarrow a = -\frac{5400}{25\,921} \approx -0{,}21$.



Nachgefragt

K1/5
- Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Für $f_a: x \mapsto a^2$, $D_{f_a} = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, gilt $f_{-1}(x) = f_1(x) = 1$.

K1/6
- Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ verläuft parallel zur y-Achse und ist nicht der Graph einer (linearen) Funktion.

Aufgaben

K1/5 **1**
a) g gehört zur Funktionenschar: $g(x) = f_{-2}(x)$.
b) h gehört nicht zur Funktionenschar, da $2a + 3 = 10 \Rightarrow a = 3{,}5$, aber $\frac{12}{3{,}5} \neq 4$ gilt.
c) k gehört nicht zur Funktionenschar, da $\frac{12}{a} = 6 \Rightarrow a = 2$, aber $2 \cdot 2 + 3 = 7 \neq 5$ gilt.

K4/5 **2** $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{a}x^2 + ax$; $f'_a(x) = x^2 + \frac{2}{a}x + a$; $f''_a(x) = 2x + \frac{2}{a}$

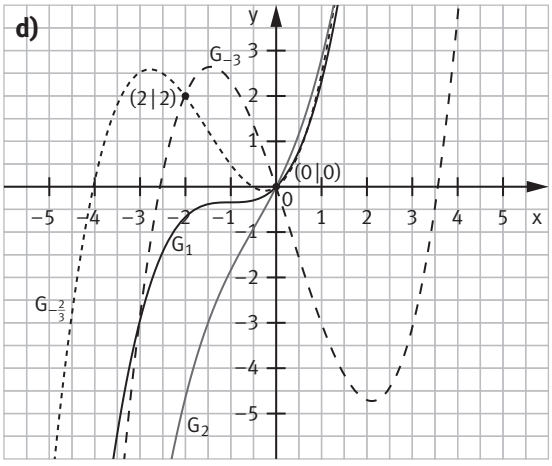
a) $f_a(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + \frac{1}{a} \cdot 0^2 + a \cdot 0 = 0$ unabhängig von a.
Also verlaufen alle Graphen von f_a durch den Ursprung.

b) 1 $f_a(-2) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{a} \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) = 2$
$\Leftrightarrow -2a^2 - \frac{14}{3}a + 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -3$; $a_2 = \frac{2}{3}$

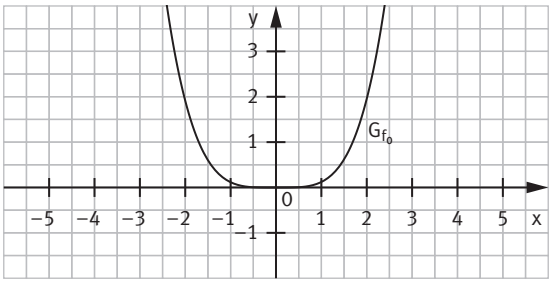
2 $f'_a(x) = 0$ hat (mindestens) eine Lösung.
$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{a}x + a = 0$ ist lösbar,
wenn für die Diskriminante
$D = \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = \frac{4}{a^2} - 4a \geq 0$ gilt,
d. h. $a^3 \leq 1 \Rightarrow a \leq 1$.

3 $f'_a(1) = 4 \Leftrightarrow 1^2 + \frac{2}{a} \cdot 1 + a = 4$
$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$; $a_2 = 2$

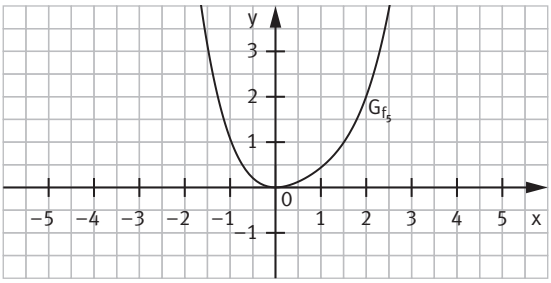
c) $f''_a(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{2}{a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{a}$;
$f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{5}{24a^3} - \frac{1}{2}$; $P_a\left(-\frac{1}{a}\middle|\frac{2}{3a^3} - 1\right)$

d)


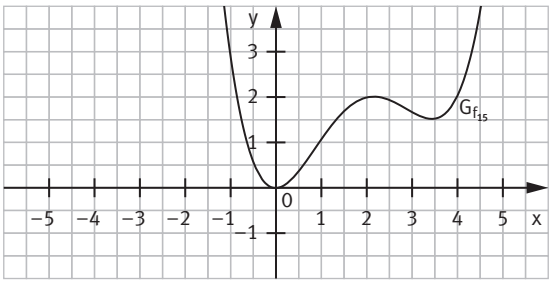
K4/5 **3** **a)** 1 a = 0



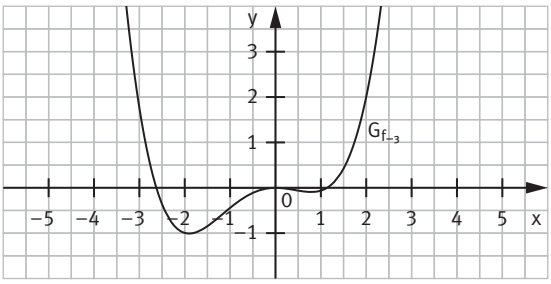
2 mögliche Lösung: a = 5



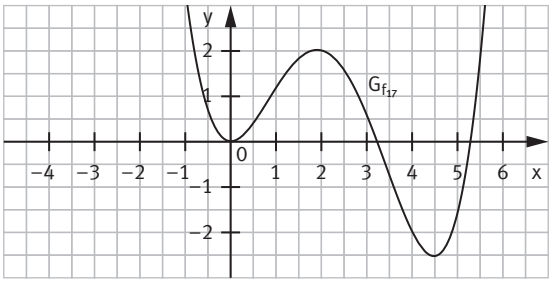
3 mögliche Lösung: a = 15



4 mögliche Lösung: a = –3



5 mögliche Lösung: a = 17



b) mögliche Lösungen:

1 $f_0(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot 2x^2 = \frac{1}{8}x^4$ ist ganzrational und besitzt nur einen geraden Exponenten.

2 $f_5(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 (2x^2 - 5x + 10) = \frac{1}{16}(2x^4 - 5x^3 + 10x^2)$; $f_5'(x) = \frac{1}{16}(8x^3 - 15x^2 + 20x)$
$= \frac{x}{16}(8x^2 - 15x + 20)$
$f_5'(x) = 0 \Leftrightarrow x(8x^2 - 15x + 20) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
Die quadratische Gleichung $8x^2 - 15x + 20 = 0$ hat die Diskriminante
$D = 15^2 - 4 \cdot 8 \cdot 20 = -415 < 0$.

3 $a = 15 > 0$
$f_{15}'(x) = \frac{1}{16}(8x^3 - 45x^2 + 60x)$; $f_{15}''(x) = \frac{1}{32}(12x^2 - 45x + 30)$
$G_{f_{15}}$ besitzt Wendepunkte, da die Gleichung $12x^2 - 45x + 30 = 0$ lösbar ist,
da die Diskriminante $D = 45^2 - 4 \cdot 12 \cdot 30 = 585 > 0$ ist.

K1/5 **4** **a)** 1 Individuelle Lösungen mithilfe einer DMS

2 $f_k'(x) = 4kx^3 - 2k = 2k(2x^3 - 1)$
$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$

	k < 0		k > 0	
	$x \le \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$	$x \ge \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$	$x \le \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$	$x \ge \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$
$f_k'(x)$	+	–	–	+
Monotonie	↗	↘	↘	↗

b) $f_k''(x) = 12kx^2$; $f_k''\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\right) = 12k \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\right)^2 \neq 0$

Jeder Graph der Schar hat einen Extrempunkt an der Stelle $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ unabhängig von k.

Sie liegen auf der Parallelen zur y-Achse mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$.

c) $f_k''(x) = 12kx^2$

	$k < 0$	$k > 0$
$f_k''(x)$	–	+
Krümmungsverhalten	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

d) $f_k(0) = k \cdot 0^4 - 2k \cdot 0 = 0$. Der Ursprung liegt auf jedem Graphen G_{f_k}.

$f_k'(0) = -2k$

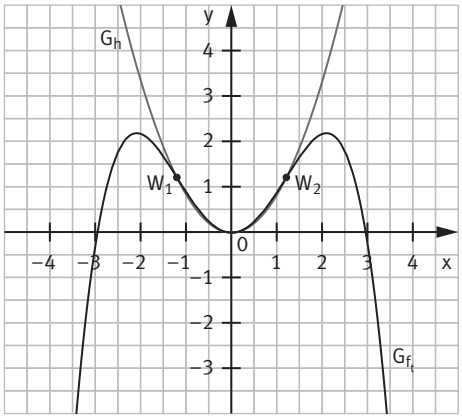
Tangentengleichung: t_0: $y = -2kx$

K3/5 **5** **a)** $f_t'(x) = -\frac{2}{t}x^3 + 2x$; $f_t''(x) = -\frac{6}{t}x^2 + 2$

$f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{t}x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}t \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3t}$ sind jeweils einfache Nullstellen von f_t'' und damit Wendestellen von f_t.

$\Rightarrow f_t\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3t}\right) = -\frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{9}t^2 + \frac{1}{3}t = \frac{5}{18}t \Rightarrow W_1\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3t}\,\middle|\,\frac{5}{18}t\right)$; $W_2\left(+\frac{1}{3}\sqrt{3t}\,\middle|\,\frac{5}{18}t\right)$

b)



$h(x_W) = h\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3t}\right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3}t = \frac{5}{18}t = y_W$

Der Ursprung liegt zwar auf G_h, ist aber nicht Wendepunkt eines Graphen $G_{f_t}(t > 0)$.

c) Extremstelle von f_t: $f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{t}x(-x^2 + t) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{t}$

$f_t''(\sqrt{t}) = 4 > 0$; an der Stelle $x_2 = \sqrt{t}$ hat G_{f_t} einen Hochpunkt $H\left(\sqrt{t}\,\middle|\,\frac{1}{2}t\right)$.

Der Kanal hat eine Tiefe von mindestens 4 m, wenn $f_t(\sqrt{t}) \geq 4$, d. h. $t \geq 8$ gilt.

Der größte Steigungswinkel liegt im Wendepunkt vor: Für $t = 8$ ist $x_W = \frac{1}{3}\sqrt{3 \cdot 8} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

$f_t'\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right) = -\frac{2}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^3 + 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{8}{9}\sqrt{6}$; $\tan\alpha = \frac{8}{9}\sqrt{6} \Rightarrow \alpha \approx 65{,}3°$

Das Modell genügt den Anforderungen nicht, da bei einer Kanaltiefe von mindestens 4 m der größte Böschungswinkel größer als 65° ist.

K2/3 **6** **a)** z. B. rote Gerade: Steigung $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40 - 20}{-10 - 20} = -\frac{2}{3}$

$f_{-\frac{2}{3}}(5) = -\frac{2}{3} \cdot 5 + 20 - 20 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 30$

Der Punkt (5 | 30) liegt auf der roten Geraden.

b) $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ und $k_1 \neq k_2$, $f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \Leftrightarrow k_1x + 20 - 20k_1 = k_2x + 20 - 20k_2$

$\Leftrightarrow k_1(x - 20) = k_2(x - 20) \Rightarrow x = 20$; $f_k(20) = 20k + 20 - 20k = 20$

P(20 | 20) ist gemeinsamer Punkt aller Graphen von f_k.

c) Der (negative) Parameter k muss größer werden. Benötigt man bei gleicher Außentemperatur eine geringere Vorlauftemperatur, so muss die gewählte Gerade im dargestellten Koordinatensystem flacher werden.

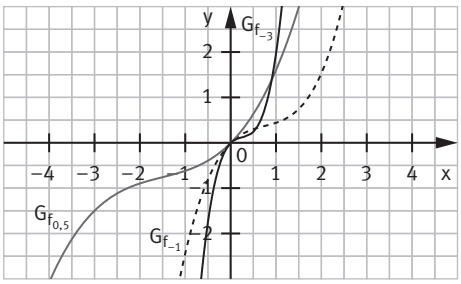
d) $f_k(-10) = 60 \Leftrightarrow -10k + 20 - 20k = 60 \Leftrightarrow 30k = -40 \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$

e) Die gestrichelten Geraden verlaufen jeweils parallel zur durchgezogenen Gerade gleicher Farbe. Der Parameter t verschiebt die Gerade parallel zur y-Achse.

Beispiel: $f_{k,t}(x) = kx + 20 - 20k + t$

Der Parameter t sorgt damit für eine konstante Erhöhung oder Verminderung der Vorlauftemperatur.

K2/5 **7** **a)**



b) $f_t(0) = \frac{4}{9}t^2 \cdot 0^3 + t \cdot 0^2 + 0 = 0$; alle Graphen der Schar verlaufen durch den Ursprung.

$f_t'(x) = \frac{4}{3}t^2x^2 + 2tx + 1$; $f_t'(0) = 1$ unabhängig von t

Tangentengleichung: t_0: $y = x$

c) $f_t'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3}t^2x^2 + 2tx + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3}tx\left(tx + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{3}{2t}$

$f_t(0) = 0;\ f_t\left(-\frac{3}{2t}\right) = \frac{4}{9}t^2 \cdot \left(-\frac{27}{8t^3}\right) + t \cdot \frac{9}{4t^2} - \frac{3}{2t} = -\frac{3}{4t}$

Steigung: $m = \frac{-\frac{3}{4t}}{-\frac{3}{2t}} = \frac{1}{2}$

Geradengleichung: $y = \frac{1}{2}x$, unabhängig vom Parameter t.

d) $f_t''(x) = \frac{8}{3}t^2x + 2t = 0 \Rightarrow t\left(\frac{8}{3}tx + 2\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4t} \Rightarrow f_t'\left(\frac{3}{4t}\right) = 2{,}5$

Alle Wendetangenten haben die gleiche Steigung.

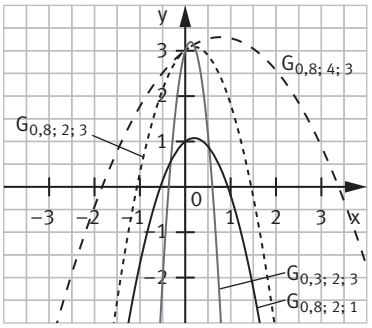
e) Angenommen, die Graphen haben mehr Punkte als nur den Ursprung gemeinsam:

$f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x) \Leftrightarrow \frac{4}{9}t_1^2x^3 + t_1x^2 + x = \frac{4}{9}t_2^2x^3 + t_2x^2 + x \Leftrightarrow \frac{4}{9}t_1^2x^3 + t_1x^2 = \frac{4}{9}t_2^2x^3 + t_2x^2$

$\Leftrightarrow \frac{4}{9}t_1^2x + t_1 = \frac{4}{9}t_2^2x + t_2 \Leftrightarrow x\left(\frac{4}{9}t_1^2 - \frac{4}{9}t_2^2\right) = t_1 - t_2 \Leftrightarrow \frac{4}{9}x\left(t_1 - t_2\right)\left(t_1 + t_2\right) = t_1 - t_2$

Für $t_1 = -t_2$ haben zwei Graphen der Funktionenschar nur den Ursprung als gemeinsamen Punkt.

K2/3 **8** **a)**



b) c beschreibt die maximale Höhe, die die Kugel bei ihrer Flugbahn erreicht.

Realistischer Wert für b ist z. B. $b = 15\,\frac{m}{s}$.

c) $f_{a,b,c}'(x) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{10}{a^2b^2}x$; $f_{a,b,c}'(0) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ unabhängig von b und c

Für die Größe φ des Abwurfwinkels gilt: $\tan\varphi = f_{a,b,c}'(0)$. Also ist dieser nur vom Parameter a abhängig.

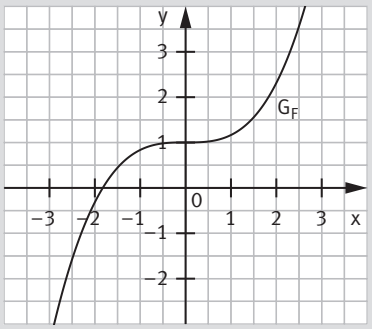
d) Individuelle Ergebnisse

Hinweis: Als optimale Abwurfwinkel gelten beim Kugelstoßen Winkel zwischen 37° und 40°.

Entdecken

K1/4 ■ Die Funktion F hat bei $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente, da die Ableitungsfunktion dort eine Nullstelle hat. Da die Funktion $f = F'$ an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Vorzeichenwechsel hat, liegt bei G_F kein Extrempunkt vor.

K4/6 ■ Individuelle Ergebnisse. Möglicher Graph:



Nachgefragt

K1/5 ■ Die Aussage ist wahr. Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f, so gilt:
$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, d. h. $F_1(x) - F_2(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

K1/6 ■ Die Aussage ist für eine lineare Funktion wahr. Für eine lineare Funktion $f: x \mapsto mx + t$; $m, t \in \mathbb{R}$, ist die Funktion $F: x \mapsto \frac{1}{2}mx^2 + tx$ eine Stammfunktion. Der Graph von F ist eine Parabel, die in y-Richtung so verschoben werden kann, dass sie die x-Achse nicht schneidet. Die zur verschobenen Parabel gehörende Funktion $F_c: x \mapsto F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, ist ebenfalls eine Stammfunktion von f.
Die Aussage ist für eine quadratische Funktion falsch.
Gegenbeispiel: $f: x \mapsto x^2$. Die Stammfunktionen von f sind die Funktionen $F_c: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + c$, von denen keine ohne Nullstelle ist.

Aufgaben

K1/4 **1** Abbildung 1 : Der Graph G_f verläuft im Intervall $[0; 1]$ oberhalb der x-Achse, d. h. der Graph einer Stammfunktion der Funktion f ist in diesem Intervall streng monoton steigend. Dies schließt den Graphen in Abbildung B aus.
Damit gehören die Abbildung A und C zu Stammfunktionen von f.

K5 **2** **a)** $F_1(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - x^2 + x$
$F_2(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - x^2 + x + 2$
$F_3(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - x^2 + x - 3$

b) $f(x) = 4(x + 3)^2 - 2 = 4x^2 + 24x + 34$
$F_1(x) = \frac{4}{3}x^3 + 12x^2 + 34x$
$F_2(x) = \frac{4}{3}x^3 + 12x^2 + 34x + 4$
$F_3(x) = \frac{4}{3}x^3 + 12x^2 + 34x - 1$

c) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) - x^4 = -1$
$F_1(x) = -x$; $F_2(x) = 1 - x$; $F_3(x) = -x - 3$

d) $F_1(x) = x - \frac{1}{16}x^4 - \frac{2}{9}x^3$; $F_2(x) = -\frac{1}{16}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + x + 2$; $F_3(x) = -\frac{1}{16}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - 3$

K1/5 **3** **a)** 1 $F(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + c$; $F(2) = \frac{1}{20} \cdot 2^4 - \frac{5}{4} \cdot 2^2 + c = 0{,}2 \Rightarrow c = 4{,}4$

$F(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{5}{6}x^2 + 4{,}4$

2 $F(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^3 - x + c$; $F(1) = 2 + 1 - 2 - 1 + c = 3 \Rightarrow c = 3$

$F(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^3 - x + 3$

3 $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + c$; $F(-1) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - 1 + c = \frac{5}{12} + c = 1 \Rightarrow c = \frac{7}{12}$

$F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + \frac{7}{12}$

4 $F(x) = \sqrt{2}\,x^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + c$; $F(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + c = 3 + c = 3 \Rightarrow c = 0$

$F(x) = \sqrt{2}\,x^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}x$

b) 1 Es gibt solche Stammfunktionen, da $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

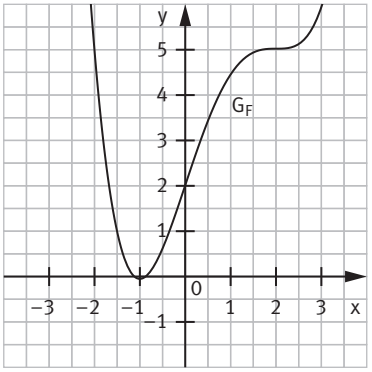
2 Es gibt keine solche Stammfunktionen, da $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

3 Es gibt solche Stammfunktionen, da $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

4 Es gibt keine solche Stammfunktionen, da $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

K1/4 **4** **a)** Im Intervall $]-\infty; -1]$ ist G_F streng monoton fallend. An der Stelle $x = -1$ hat G_F einen Tiefpunkt, im Intervall $[-1; +\infty[$ ist G_F streng monoton steigend. An der Stelle $x = 2$ hat G_F einen Terrassenpunkt. An der Stelle $x = 0$ besitzt G_F einen weiteren Wendepunkt.

b)



K1/4 **5** $G_1 - G_B$, da die Parabel nach unten geöffnet und weiter als G_A ist.
$G_2 - G_A$, da die Parabel nach unten geöffnet und enger als G_B ist.
$G_3 - G_E$, da die Parabel nach oben geöffnet und enger als G_D ist.
$G_4 - G_D$, da die Parabel nach oben geöffnet und weiter als G_E ist.
$G_5 - G_C$, da G_C eine konstante Steigung hat.

K1/4 **6** **a)** G_B ist der Graph der Ableitungsfunktion.
G_A kann nicht zur Ableitungsfunktion von f gehören, da G_A im Intervall $[0; 1]$ unterhalb der x-Achse verläuft, G_f dort aber streng monoton steigt.
G_C kann nicht zur Ableitungsfunktion von f gehören, da sich aus dem Graphen G_f an der Stelle $x = 3{,}5$ eine Steigung von etwa -1 ergibt. Der Funktionswert der zu G_C gehörenden Funktion ist an der Stelle $x = 3{,}5$ allerdings kleiner als -2.

b) Im Intervall $[1; 3]$ ist G_F streng monoton steigend, da die Ableitungsfunktion f in diesem Intervall positiv ist.

K1/5 **7** **a)** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f: x \mapsto x^2$; $f'(x) = 2x$;
mögliche Stammfunktion: $f_1(x) = x^2 + 1 \neq f(x)$.

b) Die Aussage ist wahr. Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt $F'(x) = f(x)$.

K1/4 **8** **a)** Die Aussage ist falsch, da die Funktion f an der Stelle $x_0 = -2$ keinen Vorzeichenwechsel hat.

b) Die Aussage ist wahr, da die negative Steigung von G_f in diesem Intervall zunimmt.

c) Die Aussage ist wahr, da G_f im Intervall $[-3; 6]$ genau zwei Extrempunkte besitzt.

d) Die Aussage ist wahr. Es gilt $f''(-2) > 0$, da G_f an der Stelle $x_0 = -2$ linksgekrümmt ist, und es gilt $f'(-2) = 0$. Damit folgt insgesamt, $f''(-2) + f'(-2) > 0$.

e) Die Aussage ist wahr, da $F'(0) = f(0) = 4 > 1$ gilt.

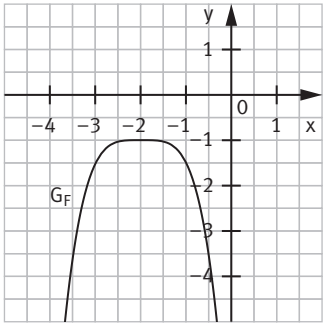
f) Die Aussage ist wahr, da G_F im Intervall $[0; 5]$ streng monoton steigend ist.

K1/5 **9** **a)** $F'(x) = 2x^3 + 12x^2 + 24x + 16 = 2(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) = f_2(x)$

b) Mögliche Stammfunktion von f_a: $F_a(x) = a \cdot \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x\right)$

Für $a < 0$ gibt es Stammfunktionen, die nur negative Funktionswerte annehmen, da für $a < 0$ gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} F_a(x) = -\infty$.

Möglicher Graph:



K5/6 **10** Achten Sie bei jeder Aufgabe darauf, welches die Funktionsvariable ist, und bestimmen Sie dann eine Stammfunktion.

a) $F_t(x) = \frac{1}{3}tx^3 + \frac{1}{2t}x^2$

b) $F_a(t) = \frac{1}{2}t^2a^2 - \frac{1}{2}t^2a$

c) $F_t(a) = \frac{1}{3}ta^3 - \frac{1}{2}ta^2$

d) $F_a(x) = ax + \frac{1}{2}x^2$

e) $F_k(t) = \frac{1}{2}t^2k^2 + \frac{1}{2}t^2k - \frac{1}{4}kt^4$

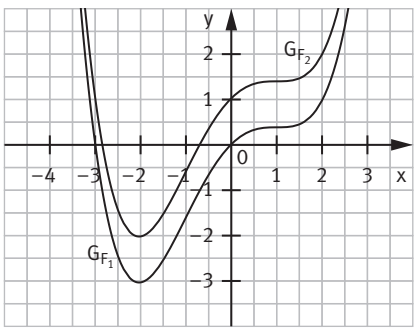
f) $F_t(k) = \frac{1}{3}tk^3 + \frac{1}{2}tk^2 - \frac{1}{2}k^2t^3$

K1/4 **11** **a)** Monotonie: G_f verläuft für $x < -2$ unterhalb der x-Achse, für $x > -2$ oberhalb der x-Achse (Ausnahme: isolierte Stelle $x = 1$).

	$x \leq -2$	$x \geq -2$
G_F	streng monoton fallend	streng monoton steigend

Krümmungsverhalten: G_f ist für $x \leq -1$ und für $x \geq 1$ streng monoton steigend, im Intervall $[-1; 1]$ streng monoton fallend.

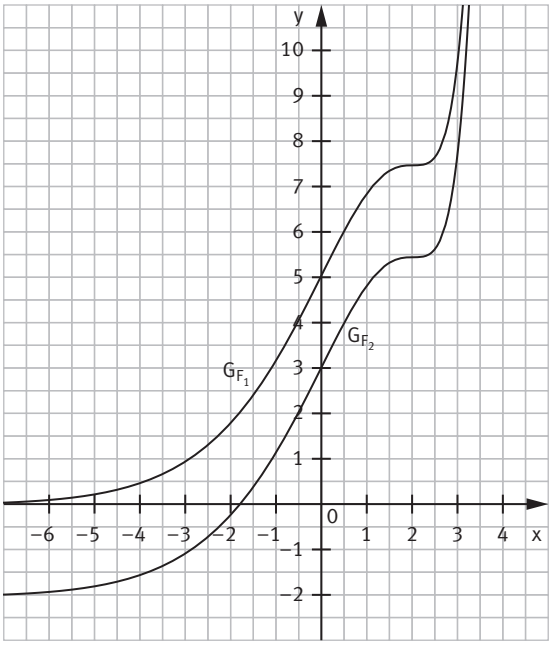
	$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 1$	$x \geq 1$
G_F	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt



b) Monotonie: G_f verläuft für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der x-Achse (Ausnahme: isolierte Stelle $x = 2$), d. h. G_F ist für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton steigend.

Krümmungsverhalten: G_f ist für $x \leq 0$ und für $x \geq 2$ streng monoton steigend, im Intervall $[0; 2]$ streng monoton fallend.

	$x \leq 0$	$0 \leq x \leq 2$	$x \geq 2$
G_F	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

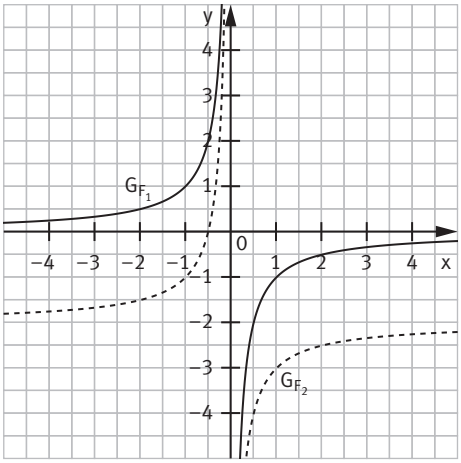


c) Monotonie: G_f verläuft für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der x-Achse und besitzt an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle.

	$x < 0$	$x > 0$
G_F	streng monoton steigend	streng monoton steigend

Krümmungsverhalten: G_f ist für $x < 0$ streng monoton steigend und für $x > 0$ streng monoton fallend.

	$x < 0$	$x > 0$
G_F	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt

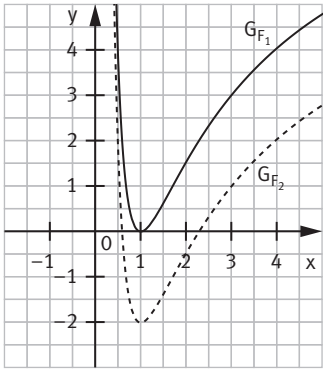


d) Monotonie: G_f verläuft für $x < 1$ unterhalb der x-Achse und für $x > 1$ oberhalb der x-Achse.

	$x \leq 1$	$x \geq 1$
G_F	streng monoton fallend	streng monoton steigend

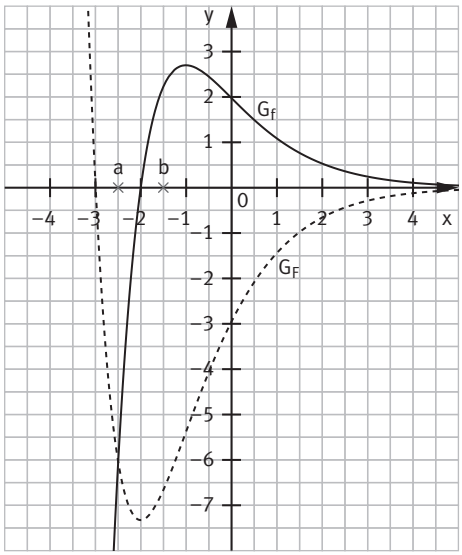
Krümmungsverhalten: G_f ist ungefähr für $x < 1{,}7$ streng monoton steigend und für $x > 1{,}7$ streng monoton fallend.

	$x < 1{,}7$	$x > 1{,}7$
G_F	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt

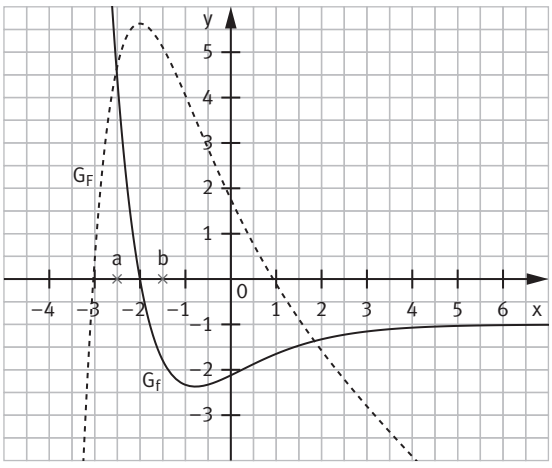


K4/6 **12 a)** und **b)**

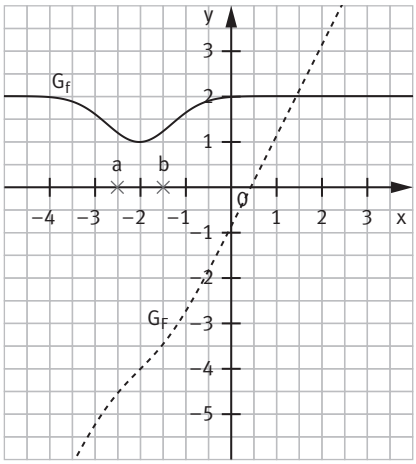
1 G_F ist im Intervall $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ streng monoton fallend und im Intervall $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ streng monoton steigend.



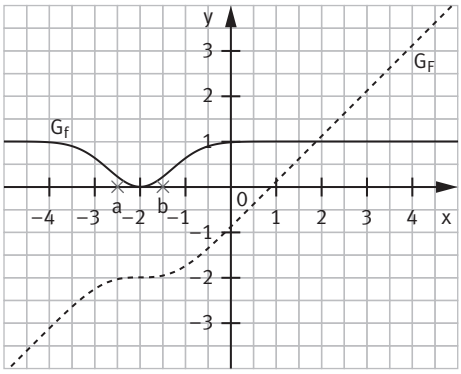
2 G_F ist im Intervall $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ streng monoton steigend und im Intervall $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ streng monoton fallend.



3 G_F ist im Intervall [a; b] streng monoton steigend.



4 G_F ist im Intervall [a; b] streng monoton steigend.



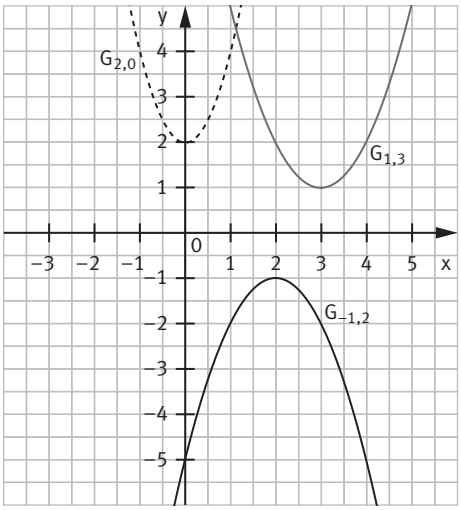
K1/5 **13 a)** Mögliche Lösungen: 1 a = –1; b = 2 2 a = 1; b = 3 3 a = 2; b = 0

b) 1 Die Aussage ist wahr. Die Graphen der Schar sind Parabeln mit dem Scheitel S (b | a). Wäre der Punkt (–1 | –3) ein Tiefpunkt, so wäre a = –3 < 0 und damit die Parabel nach unten geöffnet. Damit hätte sie aber keinen Tiefpunkt. Dies ist ein Widerspruch. Der Punkt (–1 | –3) kann also nicht ein Tiefpunkt einer der Graphen sein.

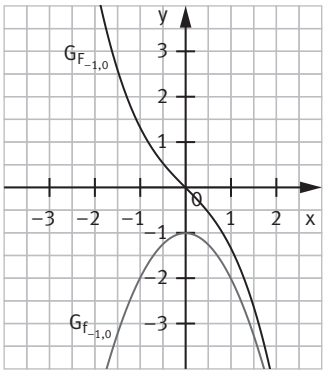
2 Die Aussage ist wahr. Die Gleichung $f_{a,b}(x) = 0$ besitzt unabhängig von a und b keine Lösung: $f_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow (x - b)^2 = -1$. Daher gibt es keine Stammfunktion von $f_{a,b}$ mit einer waagrechten Tangente.

3 Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Gegenbeispiel: Die Funktion $f_{-1,0}$: $x \mapsto -x^2 - 1$ ist im Intervall $]-\infty; 0[$ streng monoton zunehmend, der Graph einer Stammfunktion ist daher in diesem Intervall linksgekrümmt.

c) zu Teilaufgabe a)



zu Teilaufgabe b) 3



K1/2 **14 a)** Man untersucht, für welche x-Werte $f(x) = 1$ ist.

b) Man untersucht, an welchen Stellen G_f einen Tief- oder Hochpunkt auf der x-Achse besitzt.

c) Man untersucht, ob G_f punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist.

K2/5 **15 a)** $A_a(u) = a \cdot u$

b) Für g_m: $A_m(u) = \frac{1}{2}mu^2$

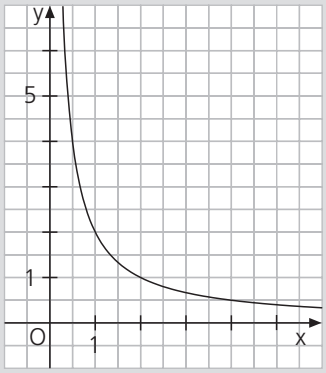
Für $h_{m,t}$: $A_{m,t}(u) = ut + \frac{1}{2}mu^2$

c) Die Terme $f_a(x)$ (bzw. $g_m(x)$ bzw. $h_{m,t}(x)$) sind Ableitungsterme von $A_a(u)$ (bzw. $A_m(u)$ bzw. $A_{m,t}(u)$).

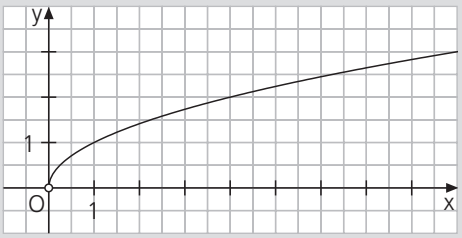
Vertiefung

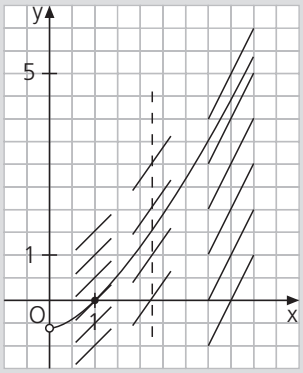
K3/4 **Graphen von Stammfunktionen zeichnerisch ermitteln**

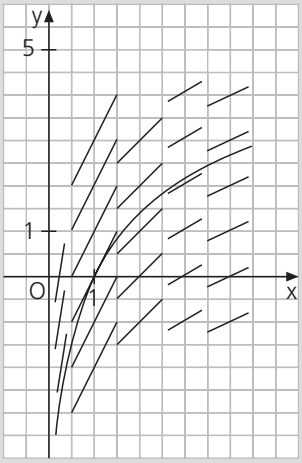
■ 1



2



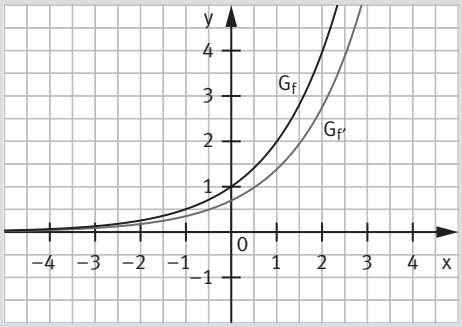




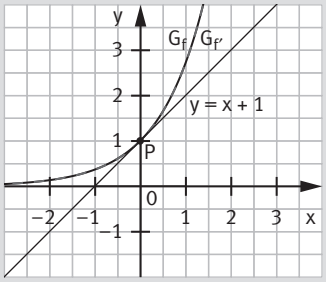
■ Die (senkrechte Projektion der) Ballonflugbahn ergibt sich aus dem Richtungsfeld der Wellenkarte ebenso wie in den Lösungen zur vorherigen Aufgabe, jeder Stammfunktionsgraph aus dem vorgegebenen Richtungsfeld.

Entdecken

K4/6 ■ Individuelle Lösungen. Beispiel für a = 2:



K4/6 ■



Der Graph derjenigen Exponentialfunktion, die an der Stelle x = 0 die Steigung 1 hat, ist identisch mit dem Graphen seiner Ableitungsfunktion.

Nachgefragt

K1/5 ■ $f(a + b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = f(a) \cdot f(b)$

K1/5 ■ Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Daher besitzt der Graph der Funktion f_a die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = a für $x \to -\infty$.

Aufgaben

K1/6 **1** Individuelle Lösungen, z. B.:

- Maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$; Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}^+$
- Keine Nullstellen, keine Extrem- und Wendestellen
- Keine Symmetrie
- Der Graph verläuft durch den Punkt (0 | 1).
- Der Graph besitzt für $x \to -\infty$ die x-Achse als waagrechte Asymptote.

K5 **2** **a)** $f'(x) = 2e^x$; $f''(x) = 2e^x$; $F(x) = 2e^x + 3x$

b) $f'(x) = -\frac{1}{2}e^x$; $f''(x) = -\frac{1}{2}e^x$; $F(x) = x - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}$

c) $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}e^x$; $f''(x) = 6x - \frac{1}{4}e^x$; $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}e^x - \frac{3}{4}$

d) $f'(x) = \frac{1}{2} + 2ex - e^x$; $f''(x) = 2e - e^x$; $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}e\,x^3 - e^x + 1$

K5 **3** **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \to -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \to +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \to +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \to -\infty$

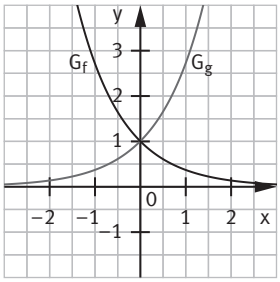
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 10^6$; waagrechte Asymptote: $y = 10^6$ für $x \to -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \to -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \to -\infty$

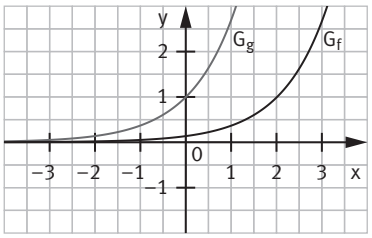
h) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; waagrechte Asymptote: $y = 0$ für $x \to -\infty$

K4/5 **4** 1 **a)** Spiegelung an der y-Achse



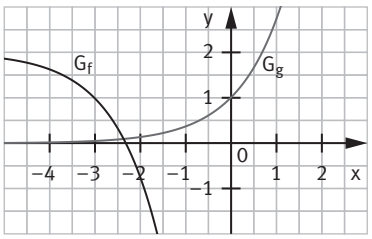
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
G_f ist streng monoton fallend;
$W_f =]0; +\infty[$

3 **a)** $f(x) = e^{x-2} = e^x \cdot e^{-2}$
Verschiebung um 2 LE in positive x-Richtung oder Stauchung in y-Richtung mit dem Faktor e^{-2}



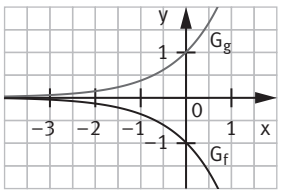
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
G_f ist streng monoton steigend;
$W_f =]0; +\infty[$

5 **a)** Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um 3 LE in negative x-Richtung und um 2 LE in positive y-Richtung



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
G_f ist streng monoton fallend;
$W_f =]-\infty; 2[$

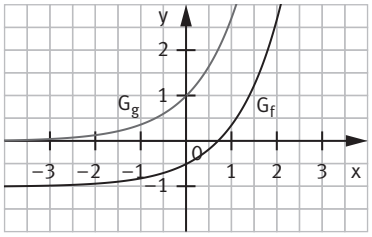
2 **a)** Spiegelung an der x-Achse



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
G_f ist streng monoton fallend;
$W_f =]-\infty; 0[$

c) $f'(x) = -e^x$; $f'(0) = -1$; $f(0) = -1$
Tangentengleichung: $y = -x - 1$

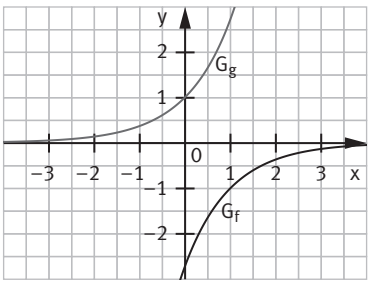
4 **a)** Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung und Verschiebung um 2 LE in negative y-Richtung



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
G_f ist streng monoton steigend; $W_f =]-1; +\infty[$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}e^x$; $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f(0) = \frac{1}{2}$
Tangentengleichung: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

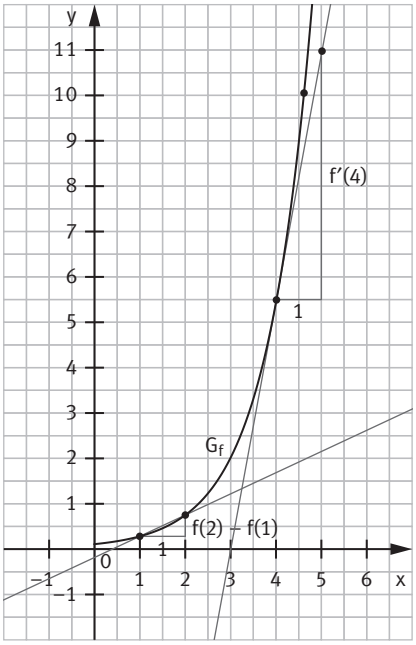
6 **a)** Verschiebung um 1 LE in positive x-Richtung, Spiegelung an der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
G_f ist streng monoton steigend; $W_f =]-\infty; 0[$

K3/6 **5** **a)** $f(x) = 10 \Leftrightarrow 0{,}1e^x = 10 \Rightarrow c = \ln 100 \approx 4{,}6$

Während Woche 5 werden erstmals mehr als 1000 Tablets verkauft.



b) 1 $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 0{,}1 \cdot (e^2 - e) \approx 4{,}7$

2 $f'(x) = 0{,}1e^x$; $f'(4) = 0{,}1 \cdot e^4 \approx 5{,}5$

c) Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, d. h. die wöchentlichen Verkaufszahlen werden nach diesem Modell beliebig groß. Dies ist in der Realität aufgrund begrenzter Ressourcen nicht möglich.

K5 **6** **a)** $f'_{a,b}(x) = b \cdot e^x$; $f'_{a,b}(0) = 2 \Rightarrow b = 2$; $f_{a,b}(0) = 3 \Leftrightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$

b) $f_{a,b}(1) = -e \Rightarrow a + be = -e \Rightarrow b = -1$; $a = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (a + b e^x) = a \Rightarrow a = 4$; $f''_{a,b}(x) = b \cdot e^x$; $f''_{a,b}(-1) = be^{-1} = \frac{b}{e} \Rightarrow b = 1$

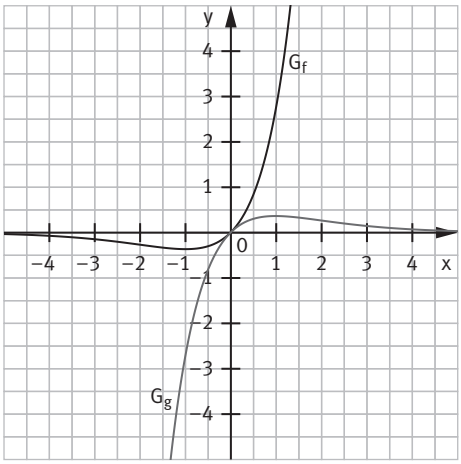
d) $f_{a,b}(0) = 2e \Rightarrow a + b = 2e$; $W_{f_{a,b}} =]e; +\infty[\Rightarrow b = e$; $a = e$

K4/5 **7** **a)** $f(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$

$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 0$

b) Wegen $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ haben f(x) und g(x) stets dasselbe Vorzeichen wie x.
Damit haben sie stets dasselbe Vorzeichen.

c) Spiegelt man den Graphen von f am Koordinatenursprung, so erhält man den Graphen der Funktion f^* mit
$f^*(x) = -f(-x) = -(-xe^{-x}) = \frac{x}{e^x} = g(x)$.
Die Graphen liegen also punktsymmetrisch zueinander.



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

e) Es gilt: $f'(x) = e^x + xe^x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$;
$f''(x) = 2e^x + xe^x$; $f''(-1) = 2e^{-1} - e^{-1} = e^{-1} > 0$; $f(-1) = -\frac{1}{e}$
Der Graph von f hat einen Tiefpunkt $T\left(-1 \middle| -\frac{1}{e}\right)$.
Es gilt: $g'(x) = \frac{-x + 1}{e^x}$; $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$;
$g''(x) = \frac{x - 2}{e^x}$; $g''(1) = -\frac{1}{e} < 0$; $g(1) = \frac{1}{e}$
Der Graph von g hat einen Hochpunkt $H\left(1 \middle| \frac{1}{e}\right)$.

K3/5 **8** **a)** $k_{a,b}(-3) = g(-3) \Leftrightarrow -3a + b \cdot e^{-3} = -\frac{5}{6}$ (I)

Ableitungen: $g'(x) = \frac{1}{2}$; $k'_{a,b}(x) = a + b\,e^x$

$k'_{a,b}(-3) = g'(-3) \Rightarrow a + b \cdot e^{-3} = \frac{1}{2}$ (II)

(II) – (I): $4a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ Einsetzen in (II): $b \cdot e^{-3} = \frac{1}{6} \Rightarrow b = \frac{1}{6}e^3$

b) $k'_{a,b}(0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^3$

Größe des Schnittwinkels der Tangente mit der x-Achse: $\tan\alpha = k'_{a,b}(0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^3 \Rightarrow \alpha \approx 74{,}8°$

Größe des Schnittwinkels der Tangente mit der y-Achse: $\beta = 90° - \alpha \approx 15{,}2°$.

c) $k''_{a,b}(x) = b\,e^x = \frac{1}{6}e^{x+3} > 0$ für alle x, d. h. die Kurve ist linksgekrümmt für zunehmende x-Werte.

d) Steigung der Geraden: $k'_{a,b}(1) = a + be = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^4$

$k_{a,b}(1) = a + be = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^4$

Geradengleichung: $y = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^4\right)x$

K2/3 **9** **a)** $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - e^x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = -\frac{1}{2}e^x$; $f''(0) = -\frac{1}{2} < 0$; $f(0) = \frac{9}{2}$; $H\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{9}{2}\right)$ ist der höchste Punkt des Hügels.

b) $\frac{1}{2}e^x$ wird für betragsgroße negative x-Werte sehr klein und kann deshalb vernachlässigt werden:

$f(-8) = \frac{1}{2}(-8) - \frac{1}{2}e^{-8} + 5 \approx -4 + 5 = 1$

Nullstellen: näherungsweise Bestimmung mithilfe des Newton-Verfahrens:

Iterationsverfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}e^{x_n} + 5}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{x_n}}$

Startwert: $x_0 = 2{,}5$

Iterationswerte: $x_1 = x_0 - \frac{\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}e^{x_0} + 5}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{x_0}} \approx 2{,}5283\ldots$

$x_2 = x_1 - \frac{\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}e^{x_1} + 5}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{x_1}} \approx 2{,}5279\ldots$

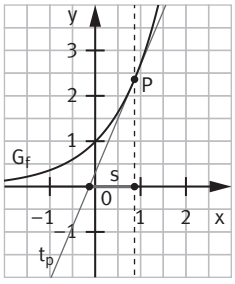
$x_3 = x_2 - \frac{\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e^{x_2} + 5}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{x_2}} \approx 2{,}5279$

Näherungswert: $x^* \approx 2{,}53$

c) 1 Steigung: $m = \frac{f(-8) - f(2{,}53)}{-8 - 2{,}53} \approx \frac{1 - 0}{-10{,}53} \approx -0{,}095$

2 Man bildet eine neue Funktion d als Differenz der „Hügelfunktion“ f und der „Tunnelfunktion“ g. Nun bestimmt man die Maximalstelle x_{max} der Funktion d im Intervall $[-8; 2{,}53]$.
Der Punkt $(x_{max}\,|\,g(x_{max}))$ ist im Modell der tiefste Punkt des Tunnels unter dem Hügel.

K4/6 **10** **a)**



b) Beobachtung: Die Strecke s hat unabhängig von der Lage von P stets die Länge 1.

Nachweis:

Tangentengleichung:

$f'(x) = e^x$; $f'(x_P) = e^{x_P}$; $f(x_P) = e^{x_P}$

$e^{x_P} = e^{x_P} \cdot x_P + t \Rightarrow t = e^{x_P}(1 - x_P)$

Tangentengleichung:

t_P: $y = e^{x_P} \cdot x + e^{x_P}(1 - x_P)$

Nullstelle der Tangente:

$e^{x_P} \cdot x + e^{x_P}(1 - x_P) = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{e^{x_P}(1 - x_P)}{e^{x_P}} = x_P - 1$

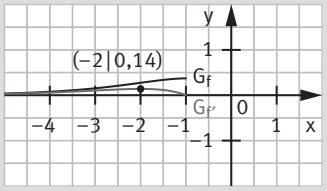
Länge der Strecke s:

$s = x_P - x_0 = 1$

Entdecken

K3/4

- Maximale Steigung 6 % = 0,06. Man zeichnet mithilfe der DMS die Graphen von f und f′ und bestimmt z. B. mithilfe des Befehls *Extremum()* das Maximum von f′.
  Dieses beträgt 0,14 an der Stelle x = –2. Die Planung berücksichtigt daher nicht die Vorgabe.



K4/6

- Die Rechnung der Planer liefert: $f'(-2) = -e^{-2} < 0$, was nicht zu $f'(-2) \approx 0{,}14 > 0$ passt.
  Daher kann die Rechnung der Planer nicht korrekt sein.
  Die Ableitung eines Produkts zweier Funktionen ist nicht das Produkt ihrer Ableitungen.

Nachgefragt

K1/5

- Die Rechnung ist falsch. Es gilt nach der Produktregel $F'(x) = 2xe^x + x^2e^x \neq f(x)$.

K5/6

- Ohne Produktregel: $f(x) = (x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$
  Mit Produktregel: $f'(x) = 1 \cdot (x - 2) + (x + 1) \cdot 1 = x - 2 + x + 1 = 2x - 1$

Aufgaben

K5/6 **1**

1. $f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3 + x)$; Produkt- und Potenzregel
2. $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 1) \cdot e^x = xe^x$; Produkt- und Potenzregel
3. $f'(x) = 6xe^x + 3x^2e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(3x^2 + 7x + 1)$;
   Summenregel, Produktregel, Potenz- und Faktorregel
4. $f(x) = e^{x+1} = e \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = e \cdot e^x = e^{x+1}$; Faktorregel
5. $f(x) = (x + e^x)^2 = x^2 + 2xe^x + e^x \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x + e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2x + 2e^x(1 + x + e^x)$;
   Summenregel; Produktregel; Faktor- und Potenzregel
6. $f'(x) = (2x - 1) \cdot e^x + (x^2 - x - 1) \cdot e^x = e^x(x^2 + x - 2)$;
   Produktregel; Summenregel; Potenz- und Faktorregel

K5/6 **2**

1. $f_1(x) = x^2 \Rightarrow f_1'(x) = 2x$
   Der Term kann als Potenz geschrieben und nach der Potenzregel abgeleitet werden.
2. $f_2(x) = \pi x^3 \Rightarrow f_2'(x) = 3\pi x^2$
   Der Faktor π ist eine reelle Zahl. Daher kann nach der Faktorregel abgeleitet werden.
3. $f_3(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f_3'(x) = 2x - 2$
   Der Term kann als Summe geschrieben und dann nach der Summenregel abgeleitet werden.
4. $f_4(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow f_4'(x) = 0$
   Der Term kann vereinfacht und dann abgeleitet werden.

K1/5 **3** **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x - 1) = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x - 1) = +\infty$.
Da f stetig ist, besitzt die Funktion mindestens eine Nullstelle, da beim Übergang von negativen zu positiven Funktionswerten an mindestens einer Stelle x_0 gelten muss $f(x_0) = 0$.

b) Ableitungen: $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x$; $f''(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x = (x + 2)e^x$

Extrempunkt: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)\,e^x = 0 \Rightarrow x = -1$; $f''(-1) = e^{-1} > 0$; $f(-1) = -e^{-1} - 1 = -\frac{1}{e} - 1$

G_f hat den Tiefpunkt $T\left(-1 \middle| -\frac{1}{e} - 1\right)$.

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)e^x = 0 \Rightarrow x = -2$ ist einfache Nullstelle von f″;

$f(-2) = -2e^{-2} - 1 = -\frac{2}{e^2} - 1$

G_f hat den Wendepunkt $W\left(-2 \middle| -\frac{2}{e^2} - 1\right)$.

c) Spitzer Winkel: $f'(0) = 1$; $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$; $\beta = 90° - \alpha = 45°$

K1/4 **4** Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, ihre Ableitung ist daher eine ganzrationale Funktion 2. Grades. Dies schließt die Graphen 1 und 3 aus. Die Funktion f hat die einfache Nullstelle $x_0 = 1$, daher kann hier keine Nullstelle der Ableitung vorliegen. Damit entfällt Graph 4.
Somit ist Graph 2 der Graph der Ableitung von f.

K3/5 **5** **a)** Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = \frac{e^x}{3}(e^2 - e^x) = 0 \Rightarrow e^2 = e^x \Rightarrow x = 2$; N (2 | 0)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{3}(e^2 - 1)$; $S_y\left(0 \middle| \frac{1}{3}(e^2 - 1)\right)$

Ableitungen:

$f'(x) = \frac{e^x}{3}(e^2 - e^x) + \frac{e^x}{3} \cdot (-e^x) = \frac{e^x}{3}(e^2 - 2e^x)$; $f''(x) = \frac{e^x}{3} \cdot (e^2 - 2\,e^x) + \frac{e^x}{3} \cdot (-2e^x) = \frac{e^x}{3}(e^2 - 4\,e^x)$

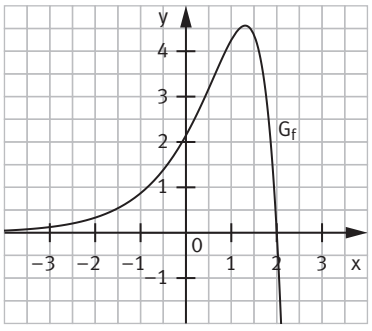
Extrempunkt:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{3}(e^2 - 2e^x) \Rightarrow e^x = \frac{e^2}{2} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{e^2}{2}\right) = 2 - \ln 2$;

$f''(2 - \ln 2) = \frac{e^2}{6}(e^2 - 2e^2) = -\frac{e^4}{6} < 0$; $f(2 - \ln 2) = \frac{e^4}{12}$

G_f hat einen Hochpunkt $H\left(2 - \ln 2 \middle| \frac{e^4}{12}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{e^x}{3}(e^2 - e^x)\right] = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{e^x}{3}(e^2 - e^x)\right] = -\infty$



c) 1 Mittlere Steigung: $m = \frac{f(2) - f(2 - \ln 2)}{2 - (2 - \ln 2)} = \frac{-\frac{e^4}{12}}{\ln 2} \approx -6{,}56$

Die größte Steigung tritt an der Stelle $x_0 = 2$ auf: $f'(2) = \frac{e^2}{3}(e^2 - 2\,e^2) = -\frac{e^4}{3} \approx -18{,}20 > m$.

2 Die größte Steigung des Walls auf der der Siedlung zugewandten Seite tritt im Modell am Wendepunkt von G_f auf.

Man berechnet den x-Wert des Wendepunkts durch Lösen der Gleichung $f''(x) = 0$. Die Lösung setzt man in $f'(x)$ ein, um die größte Steigung zu erhalten.

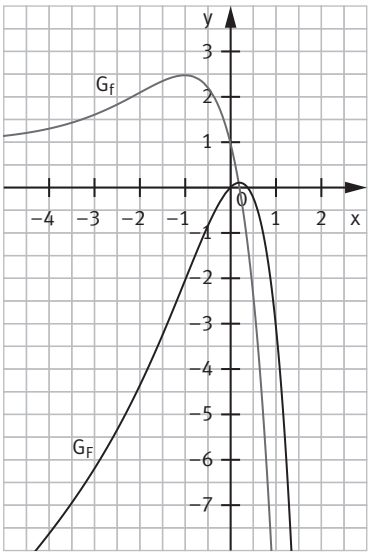
K5 **6** **a)** $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1)\,e^x \Rightarrow a = 1$

b) $F'(x) = 1 \cdot e^x + (x + b)e^x = (x + b + 1)e^x \Rightarrow b = -1$

K4/5 **7** **a)** $f'(x) = -4e^x - 4xe^x = -4e^x(1 + x)$; $f''(x) = -4e^x(1 + x) - 4e^x \cdot 1 = -4e^x(2 + x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4e^x(1 + x) = 0 \Rightarrow x = -1$; $f''(-1) = -\frac{4}{e} \neq 0$; G_f besitzt genau eine Extremstelle.

b)



c) 1 Die dem Wasser zugewandte Seite ist im Modell der Bereich für $x < -1$.
Ein Deich ist widerstandsfähiger, wenn die dem Wasser zugewandte Seite flach verläuft.

2 Bestimmung des Extrempunkts von f'.

Ableitung: $g''(x) = f''(x) = -4e^x(2 + x) - 4e^x \cdot 1 = -4e^x(2 + x)$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -4e^x(2 + x) = 0 \Rightarrow x = -2$ ist Nullstelle von g'' mit VZW.

Maximale Steigung: $g'(-2) = f'(-2) = \frac{4}{e^2}$

K1/4 **8** $G_C = G_f$, da die Funktion f im Ursprung eine doppelte Nullstelle besitzt und dies nur auf den Graphen G_C zutrifft.

$G_A = G_{f'}$, da die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ einen Tiefpunkt besitzt und G_A der einzige verbleibende Graph ist, der an der Stelle $x_0 = 0$ eine Nullstelle hat.

$G_B = G_g$, da die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ eine Nullstelle besitzt, die Funktion g daher an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert ist. Dies trifft nur für die zu G_B gehörende Funktion zu.

Folglich gilt $G_D = G_F$.

K2/5 **9** **a)** $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot e^x = 0 \Rightarrow x = 0$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 \cdot e^x = 0 \Rightarrow x = 0$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Beide Funktionen haben daher genau eine Nullstelle.

Unterschiedliches Verhalten: Durch den ungeraden Exponenten von x im Term f(x) ist die Nullstelle $x_0 = 0$ bei der Funktion f eine Nullstelle mit VZW.

Im Gegensatz dazu führt der gerade Exponent von x im Term g(x) zu einer Nullstelle ohne VZW, der Graph G_g berührt die x-Achse im Ursprung.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 e^x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 e^x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 e^x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 e^x) = +\infty$

Extrempunkte von G_f:

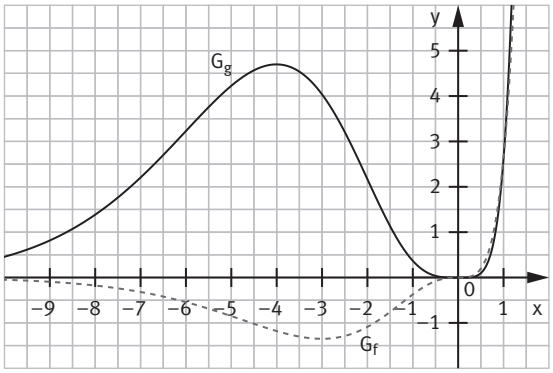
$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x(3 + x)$; $f''(x) = 6xe^x + 3x^2 e^x + 3x^2 e^x + x^3 e^x = xe^x(6 + 6x + x^2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^x(3 + x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3$; $x_2 = 0$

$f''(-3) = \frac{9}{e^3} > 0$; $f(-3) = -\frac{27}{e^3}$; G_f hat den Tiefpunkt $T\left(-3 \middle| -\frac{27}{e^3}\right)$.

An der Stelle $x_1 = 0$ hat f' keinen VZW und damit G_f keinen Extrempunkt.

Extrempunkte von G_g:
$g'(x) = 4x^3 e^x + x^4 e^x = x^3e^x(4 + x)$; $g''(x) = 12x^2e^x + 4x^3e^x + 4x^3e^x + x^4e^x = x^2e^x(12 + 8x + x^2)$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3e^x(4 + x) = 0 \Rightarrow x_1 = -4$; $x_2 = 0$
$g''(-4) = -\frac{64}{e^4} < 0$; $g(-4) = \frac{256}{e^4}$; G_f hat einen Hochpunkt $H\left(-4 \middle| -\frac{256}{e^4}\right)$.
g′ hat an der Stelle $x_2 = 0$ einen VZW von negativen zu positiven Werten; $g(0) = 0$;
G_g hat einen Tiefpunkt T(0|0).



c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3e^x = x^4e^x \Leftrightarrow x^3e^x(1 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$
$f(0) = 0$; $S_1(0|0)$ und $f(1) = e$; $S_2(1|e)$
Schnittwinkel bei S_1: Beide Graphen haben im Ursprung die x-Achse als waagrechte Tangente.
Für den Schnittwinkel gilt daher $\varphi_1 = 0°$.
Schnittwinkel bei S_2: Steigungswinkel von G_f: $f'(1) = 4e$; $\tan\alpha_1 = 4e \Rightarrow \alpha_1 \approx 84{,}7°$
Steigungswinkel von G_g: $g'(1) = 5e$; $\tan\alpha_1 = 5e \Rightarrow \alpha_2 \approx 85{,}8°$
Schnittwinkel: $\varphi_2 = \alpha_2 - \alpha_1 \approx 1{,}1°$

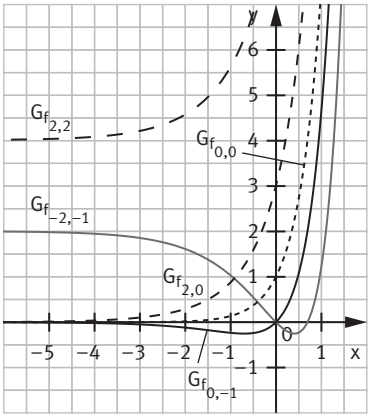
d) Man betrachtet die Funktion d mit $d(x) = g(x) - f(x) = x^3e^x(x - 1)$.
Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = +\infty$.
Der Abstand der beiden Graphen wird also für $x \to +\infty$ beliebig groß, das Maximum des Abstands wird daher nicht im Intervall $[-3; -4]$ angenommen.

K2/4 **10 a)** Mögliche Vermutungen:

1 Asymptote: $G_{f_{a,b}}$ hat unabhängig von a und b für $x \to -\infty$ eine waagrechte Asymptote.

2 Nullstellen: Für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ hat $f_{a,b}$ keine Nullstelle.
Für $a, b \in \mathbb{R}^-$ und $a \neq b$ hat $f_{a,b}$ genau zwei Nullstellen.
Für $a, b \in \mathbb{R}^-$ und $a = b$ hat $f_{a,b}$ genau eine Nullstelle.
Falls genau einer der Parameter negativ und der andere nichtnegativ ist, hat $f_{a,b}$ genau eine Nullstelle.

3 $f_{a,b}$ hat entweder keine oder genau eine Extremstelle.



b) 1 Asymptote: $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{a,b}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} [(e^x + a)(e^x + b)] = ab$; $G_{f_{a,b}}$ hat die Gerade mit $y = ab$ als waagrechte Asymptote.

2 Nullstellen: $f_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x + a)(e^x + b) = 0 \Rightarrow e^x = -a$ oder $e^x = -b$

Fall 1: $a \geq 0$ und $b \geq 0$: $e^x = -a$ und $e^x = -b$ haben jeweils keine Lösung. $f_{a,b}$ hat keine Nullstelle, wenn $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt.

Fall 2: $a < 0$ und $b < 0$: $e^x = -a \Rightarrow x = \ln(-a)$ und $e^x = -b \Rightarrow x = \ln(-b)$

$f_{a,b}$ hat genau zwei Nullstellen, falls $a \neq b$ gilt, und für $a = b$ genau eine Nullstelle.

Fall 3: $a \geq 0$ und $b < 0$ oder $a < 0$ und $b \geq 0$: Genau eine der Gleichungen $e^x = -a$ oder $e^x = -b$ ist lösbar. $f_{a,b}$ hat genau eine Nullstelle.

3 $f'_{a,b}(x) = e^x(e^x + b) + (e^x + a) \cdot e^x = e^x(2e^x + a + b)$

$f'_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2e^x + a + b) = 0 \Rightarrow e^x = -\frac{a+b}{2}$

$f_{a,b}$ hat genau dann eine Extremstelle, falls $a + b < 0$ gilt.

Entdecken

K5/6 ■ $v(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$; $u(5) = e^5 \Rightarrow f(4) = e^5$
Zunächst wird die Funktion v, dann die Funktion u ausgeführt.

K2/6 ■ Mögliche Lösung: Beispiel: $f(x) = (4x + 7)^2$ mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = 4x + 7$.
Die Reihenfolge ist entscheidend: $u(v(x)) = f(x)$, aber $v(u(x)) = 4x^2 + 7 \neq f(x)$.

Nachgefragt

K1/5 ■ Beispiel: $u(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = x - 1$
Es gilt: $u(v(x)) = \frac{1}{x-1}$ und $v(u(x)) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{x-1}{x} \neq u(v(x))$.
Die Verkettung von Funktionen ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

K5/6 ■ $f'(x) = (f(-x))' = -f'(x)$. Der Graph der Ableitungsfunktion einer Funktion, deren Graph achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ist, ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Aufgaben

K5 **1**

a) $f(x) = \frac{1}{2x+4}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ $\quad g(x) = \frac{2}{x} + 4$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

b) $f(x) = e^{(x+1)^2}$; $D_f = \mathbb{R}$ $\quad g(x) = (e^x + 1)^2$; $D_g = \mathbb{R}$

c) $f(x) = e^{x-1}$; $D_f = \mathbb{R}$ $\quad g(x) = e^x - 1$; $D_g = \mathbb{R}$

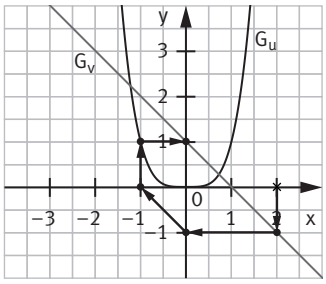
d) $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ $\quad g(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

e) $f(x) = \frac{1}{e^x}$; $D_f = \mathbb{R}$ $\quad g(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

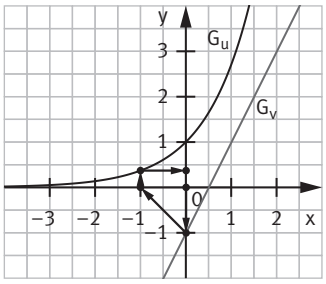
f) $f(x) = 8x^4 = g(x)$; $D_f = D_g = \mathbb{R}$

K4/5 **2**

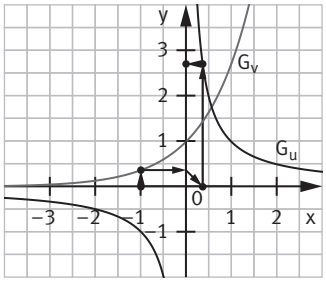
1 $u(v(2)) = 1$



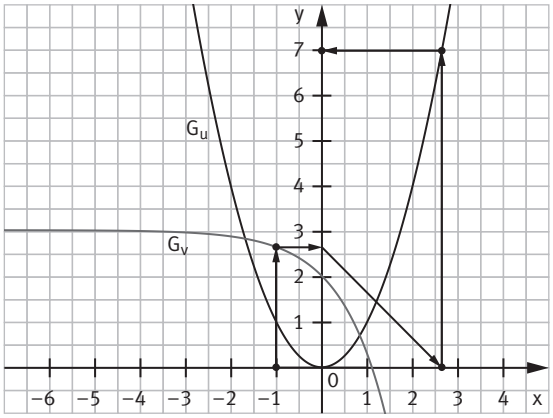
2 $u(v(0)) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$



3 $u(v(-1)) = e \approx 2{,}72$



4 $u(v(-1)) = \left(3 - \frac{1}{e}\right)^2 \approx 6{,}93$



K5 **3** **a)** $u(x) = x^3$; $v(x) = x + e^x$ $\quad f'(x) = 3(x + e^x)^2(1 + e^x)$

b) $u(x) = x^2$; $v(x) = 1 + 3x^2$ $\quad f'(x) = 2 \cdot (1 + 3x^2) \cdot 6x = 12x(1 + 3x)^2$

c) $u(x) = e^x$; $v(x) = 2x$ $\quad f'(x) = 2e^{2x}$

d) $u(x) = e^x$; $v(x) = -3x$ $\quad f'(x) = -3e^{-3x}$

e) $u(x) = x^2$; $v(x) = 1 - x^4$ $\quad f'(x) = 2 \cdot (1 - x^4) \cdot (-4x^3) = -8x^3(1 - x^4)$

f) $u(x) = 1 - e^x$; $v(x) = -x$ $\quad f'(x) = -e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}$

g) $u(x) = 6e^x$; $v(x) = 1 - 5x$ $\quad f'(x) = 6e^{1-5x} \cdot (-5) = -30e^{1-5x}$

h) $u(x) = e^x$; $v(x) = x + 1$ $\quad f'(x) = e^{x+1}$

K5/6 **4** **a)** $f'(x) = 2x \cdot e^{x-1} + x^2 \cdot e^{x-1} \cdot 1 = xe^{x-1}(2 + x)$ Produktregel und Kettenregel

b) $f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)\,e^x = e^x(x^2 + 2x + 1)$ Produktregel

c) $f'(x) = 2e^2 x$ Faktorregel

d) $f'(x) = 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2}(1 + 2x^2)$ Produktregel und Kettenregel

e) $f'(x) = 3x^2 e^{0,5x} + x^3 e^{0,5x} \cdot 0,5 = \frac{1}{2}x^2 e^{0,5x}(6 + x)$ Produktregel und Kettenregel

f) $f'(x) = 2(x + e^x)(1 + e^x)$ Kettenregel

g) $f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}(1 - x^2)$ Produktregel und Kettenregel

h) $f'(x) = \frac{2}{e^2}x$ Potenzregel und Faktorregel

i) $f'(x) = 2x \cdot e^{4x+1} + x^2 \cdot e^{4x+1} \cdot 4 = 2xe^{4x+1}(1 + 2x)$ Produktregel und Kettenregel

K4/5 **5** **a)** $f(-x) = 5(-x)e^{-(-x)^2} = -5xe^{-x^2} = -f(x)$; G_f ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$; $N(0|0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$; $S_y(0|0) = N$

Ableitungen: $f'(x) = 5 \cdot e^{-x^2} + 5x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = 5e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$f''(x) = 5e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (1 - 2x^2) + 5e^{-x^2} \cdot (-4x) = -10xe^{-x^2}(1 - 2x^2 + 2) = -10x\,e^{-x^2}(3 - 2x^2)$

Extremwerte: $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$f''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -5\sqrt{2}\,e^{-0,5} < 0$; $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{2}\,e^{-0,5}$; G_f hat einen Hochpunkt $H\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{5}{2}\sqrt{2}\,e^{-0,5}\right)$

und wegen der Punktsymmetrie einen Tiefpunkt $T\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{5}{2}\sqrt{2}\,e^{-0,5}\right)$

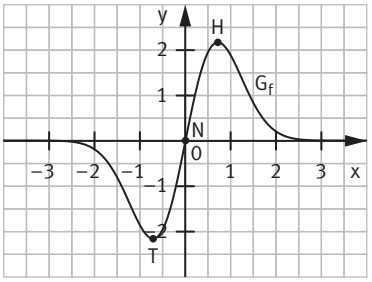
b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -10xe^{-x^2}(3 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sind jeweils Nullstellen mit VZW von f'' und damit Wendestellen von G_f.

$f'(0) = 5$; $f'\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = -10\,e^{-1,5} \approx -2,23$

G_f hat im Ursprung seine größte Steigung.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

d)



K2/3 **6** **a)** $f(t) = 3 \Leftrightarrow t^2 e^{-0,3t} - 3 = 0$

Newton'sches Näherungsverfahren:

$h(t) = t^2 e^{-0,3t} - 3$; $h'(t) = 2te^{-0,3t} + t^2 e^{-0,3t} \cdot (-0,3) = te^{-0,3t}(2 - 0,3t)$

Iterationsformel: $t_{n+1} = t_n - \frac{h(t_n)}{h'(t_n)} = t_n - \frac{t_n^2 e^{-0,3t_n} - 3}{t_n e^{-0,3t_n}(2 - 0,3t_n)}$

1 Startwert: $t_0 = 2,5$
Iterationswerte: $t_1 \approx 2,5323...$
$t_2 \approx 2,5323...$

2 Startwert: $t_0 = 14$
Iterationswerte: $t_1 \approx 13,8682...$
$t_2 \approx 13,8689...$
$t_3 \approx 13,8689...$

Nach etwa 2,5 Stunden beginnt sich ein Stau zu bilden, nach etwa 13,8 Stunden beginnt sich die Lage zu entspannen.

b) Individuelle Lösungen

K3/5 **7** **a)** $k'(t) = 12t^2 \cdot e^{-t} + 4t^3 \cdot e^{-t} \cdot (-1) = 4t^2 e^{-t}(3 - t) = 4e^{-t}(3t^2 - t^3)$;

$k'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 e^{-t}(3 - t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$; $t_2 = 3$; $k(0) = 0$; $k(3) = \frac{108}{e} > 0$.

3 Stunden nach Einnahme ist die Konzentration des Medikaments im Blut am höchsten.

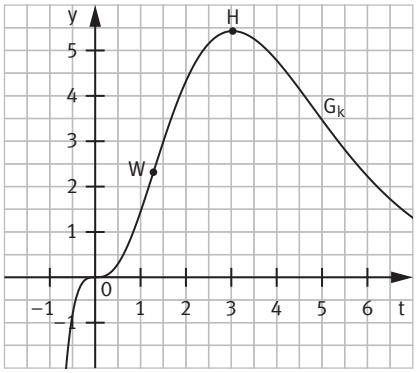
b) $k''(t) = 4e^{-t} \cdot (-1) \cdot (3t^2 - t^3) + 4e^{-t}(6t - 3t^2) = 4te^{-t}(t^2 - 6t + 6)$

$k''(t) = 0 \Leftrightarrow 4te^{-t}(t^2 - 6t + 6) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$; $t_{2/3} = 3 \pm \sqrt{3}$

$k'(3 + \sqrt{3}) \approx -1,366 < 0$; $k'(3 - \sqrt{3}) \approx 3,134 > k'(0) = 0$

Bei $t = 3 - \sqrt{3}$, also etwa 1,3 Stunden nach Einnahme ist die Zunahme der Konzentration des Medikaments im Blut am höchsten.

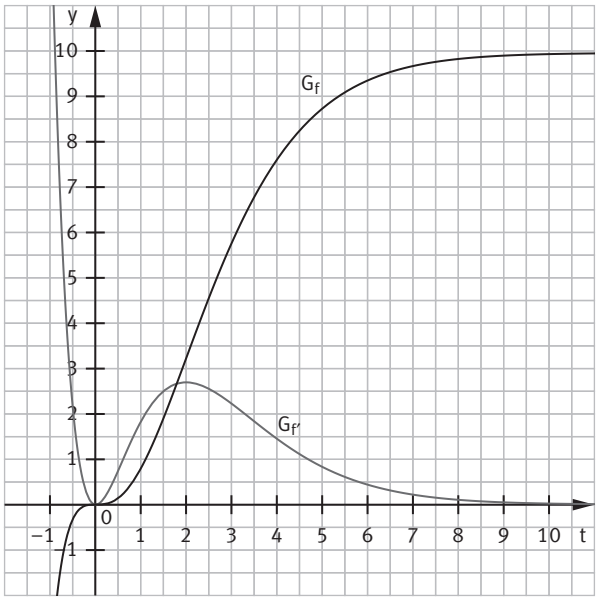
c)



K4/5 **8** $f(-2) = u(v(-2)) = u(2) = 4$

$m = f'(-2) = u'(v(-2)) \cdot v'(-2) = u'(2) \cdot v'(-2) = 0$

Tangentengleichung: t: $y = 4$



K3/5 **9** **a)** $f'(t) = -5(2t + 2)e^{-t} - 5(t^2 + 2t + 2)e^{-t} \cdot (-1)$

$= 5t^2 e^{-t}$

b) 1 $f''(t) = 10te^{-t} + 5t^2e^{-t} \cdot (-1) = 5te^{-t}(2 - t)$

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow 5te^{-t}(2 - t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0; t_2 = 2$

$f'(0) = 0; f'(2) = \frac{20}{e} > 0$. An der Stelle $t = 2$ hat G_f seinen stärksten Anstieg.

2 $f(3) - f(0) = 10 - 5(9 + 6 + 2)e^{-3} - 0 = 10 - \frac{85}{e^3} \approx 5{,}77$

Am Graphen ist dies der Funktionswert $f(3)$.

c) $f'(t) < 0{,}1 \Leftrightarrow 5t^2e^{-t} < 0{,}1$

Grafisch: $t \approx 8$

Newton'sches Näherungsverfahren: $5t^2e^{-t} - 0{,}1 = 0$

Hilfsfunktion: $h(t) = 5t^2e^{-t} - 0{,}1$; $h'(t) = f''(t) = 5te^{-t}(2 - t)$

Iterationsformel: $t_{n+1} = t_n - \frac{h(t_n)}{h'(t_n)} = t_n - \frac{5t_n^2e^{-t_n} - 0{,}1}{5t_ne^{-t_n}(2 - t_n)}$

Startwert: $t_0 = 8$

Iterationswerte: $t_1 \approx 8{,}0912...$

$t_2 \approx 8{,}0943...$

$t_3 \approx 8{,}0943...$

Nach etwa 8,1 Stunden ist der Wasserzufluss geringer als 0,1 hl/min.

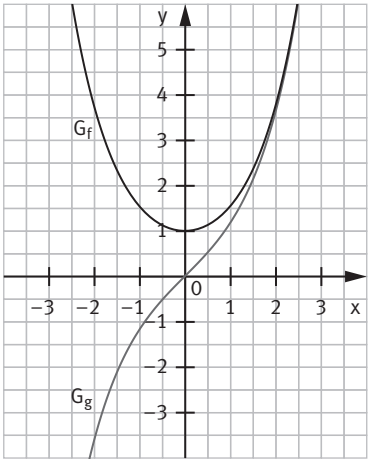
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[10 - 5(t^2 + 2t + 2)e^{-t}\right] = 10$. Das Becken muss mindestens eine Kapazität von 10 hl besitzen.

K2/5

10 a) $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x)$

$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; $g''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = g(x)$

b)



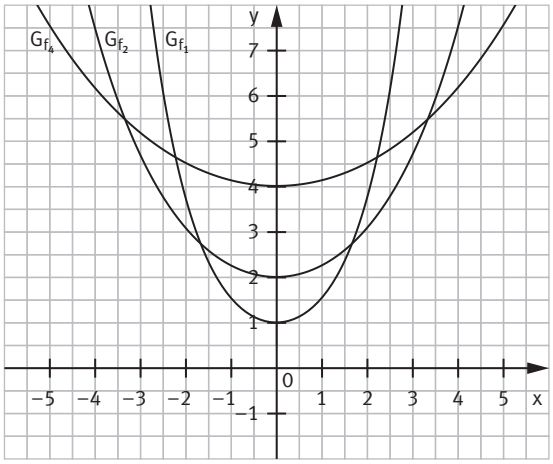
c) Mögliche Lösung: $f_1(x) = 0{,}5x^2 + 1$

d) $(f(x))^2 - (g(x))^2 = \left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1$

Die Funktion mit dem Term $(f(x))^2 - (g(x))^2$ ist eine konstante Funktion.

e) Individuelle Ergebnisse

K2/3 **11 a)**



Für größer werdendes a wird der Tiefpunkt T (0 | a) des Graphen in positive y-Richtung verschoben und gleichzeitig der Graph in y-Richtung gestreckt.

b) Der tiefste Punkt des Seils wird im Modell durch den Tiefpunkt des Graphen wiedergegeben.
Also gilt $g_a(0) = 80 \Rightarrow f_a(0) = 80 + 1320 = 1400 = a$.

$g_{1400}(640) = \frac{1400}{2}\left(e^{\frac{640}{1400}} + e^{-\frac{640}{1400}}\right) - 1320 \approx 229$. Die beiden Pylonen haben eine Höhe von ca. 229 m.

c) Parabel mit Tiefpunkt bei x = 0: $p(x) = cx^2 + b$

Bedingungen:

(I) $p(0) = 80$

(II) $p(640) = 229$

Aus (I) folgt $b = 80$.

Aus (II) folgt: $640^2c + 80 = 229 \Rightarrow c = \frac{149}{409\,600}$

$p(x) = \frac{149}{409\,600}x^2 + 80$

Entdecken

K3/5 ■ $a(2) = a_0 e^{0,7} \approx 2{,}01 a_0$. Nach zwei Jahren hat man eine Verdoppelung der Anfangsmenge a_0

K3/5 ■ $a(14) = a_0 e^{0,35 \cdot 14} = 1\,000\,000 \Rightarrow a_0 = \frac{1\,000\,000}{e^{4,9}} \approx 7446{,}58$;

$a(50) = 7446{,}58 \cdot e^{17,5} \approx 296\,558\,443\,000$

Elektronische Schaltungen haben nach diesem Modell im Jahr 2025 rund 296,9 Milliarden Schaltelemente.

K3/5 ■ $e^{0,35t} = 100 \Rightarrow t = \frac{\log_e 100}{0,35} \approx 13{,}2$

Die Anzahl der Schaltelemente hat sich Anfang 1988 gegenüber dem Jahr 1975 verhundertfacht.

Nachgefragt

K1/5 ■ Die Aussage ist wahr. $\ln a = \ln b \Rightarrow e^{\ln a} = e^{\ln b} \Rightarrow a = b$.

K1/5 ■ $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2$

Aufgaben

K5 **1** **a)** $e^{\ln 10} = 10$

b) $\ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

c) $\ln[e^{\ln(e^2)}] = \ln(e^2) = 2$

d) $\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln a + \ln 1 - \ln a = \ln 1 = 0$

e) $\ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$

f) $\ln \frac{1}{e^4} + 2 = \ln e^{-4} + 2 = -4 + 2 = -2$

g) $\ln(\ln e^2) = \ln 2$

h) $[\ln(\sqrt{a})]^2 = \left[\frac{1}{2} \ln a\right]^2 = \frac{1}{4} (\ln a)^2$

K5 **2** **a)** $e^{x+1} = 10 \Rightarrow x = \ln 10 - 1 \approx 1{,}303$

b) $1{,}8(1 + e^{1-1,5x}) = 3{,}6 \Leftrightarrow e^{1-1,5x} = 1 \Rightarrow 1 - 1{,}5x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$

c) $e^{x^2} = 2500 \Rightarrow x^2 = \ln 2500 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\ln 2500} \Rightarrow x_{1/2} \approx \pm 2{,}797$

d) $e^{3x+4} = e^{1-x} \Rightarrow 3x + 4 = 1 - x \Rightarrow x = -\frac{3}{4} = -0{,}750$

e) $e^x(e^x - e) = 0 \Rightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1$

f) $\sqrt{e^x} = e^2 \Rightarrow x = 4$

g) $e^{2x} - 5e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 5) = 0 \Rightarrow x = \ln 5 \approx 1{,}609$

h) $3e^{2x + \ln(4)} = 12 \Leftrightarrow 2x + \ln 4 = \ln 4 \Rightarrow x = 0$

i) $\frac{1}{e^x} - e^{-2} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^2 \Rightarrow x = 2$

K5/6 **3** **a)** In der zweiten Zeile wurde der Logarithmus auf der linken Seite falsch angewendet; die korrekte Anwendung des Logarithmus würde $\ln(e^x-4)$ ergeben. Allerdings ist diese Anwendung des Logarithmus nicht sinnvoll, da $\ln(e^x-4)$ sich nicht weiter umformen lässt.

Im letzten Schritt wurde das Gesetz für die Addition von Logarithmen falsch angewendet und dadurch zufällig das richtige Ergebnis gefunden.

Richtige Lösung:

$e^x - 4 = 5 \Rightarrow e^x = 9 \Rightarrow x = \ln 9$

b) Im ersten Schritt wurde –2 aus dem Exponenten fälschlich als +2 auf die rechte Seite gebracht.

Richtige Lösung:

$e^{x-2} = 8 \Rightarrow x - 2 = \ln 8 \Rightarrow x = 2 + \ln 8$

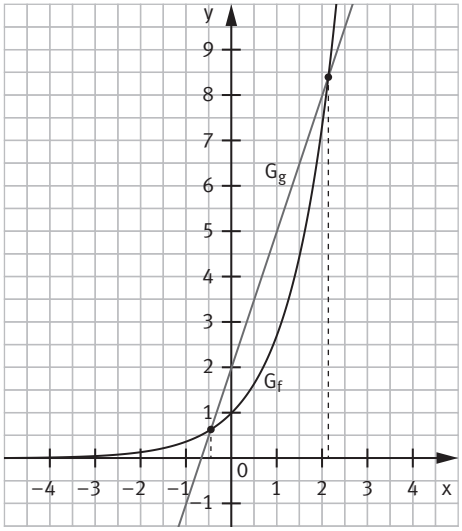
c) Im ersten Schritt wurde auf der rechten Seite nicht der Logarithmus angewandt.

Richtige Lösung:

$e^x = 3x + 2 \Rightarrow x = \ln(3x + 2)$

Diese Gleichung lässt sich nicht rechnerisch lösen. Mit einer graphischen Lösung erhält man Näherungswerte der Lösungen.

Man bestimmt die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von $f: x \mapsto e^x$ und $g: x \mapsto 3x + 2$.



Durch Ablesen findet man $x_1 \approx -0{,}46$ und $x_2 \approx 2{,}13$.

d) Die Kettenregel wurde falsch angewendet.

Richtige Lösung: $f'(x) = 2 \cdot e^{5x} \cdot 5 = 10e^{5x}$

e) Es wurde falsch abgeleitet. Der Funktionsterm muss mit der Produkt- und Kettenregel abgeleitet werden.

Richtige Lösung: $f'(x) = 3 \cdot e^{4x} + 3x \cdot e^{4x} \cdot 4 = 3e^{4x}(1 + 4x)$

f) Es wurde falsch abgeleitet. Der Funktionsterm muss mit der Produkt- und Kettenregel abgeleitet werden.

Richtige Lösung: $f'(x) = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2xe^{2x}(1 + x)$

K5 **4** **a)** $f'(x) = 2e^x$; $2e^x = 8 \Rightarrow x = \ln 4$; $f(\ln 4) = 8$; $P(\ln 4 \mid 8)$

b) $f'(x) = e^{2x}$; $e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$; $f(0) = 0{,}5$; $P(0 \mid 0{,}5)$

c) $f'(x) = -e^x$; $-e^x = -3 \Rightarrow x = \ln 3$; $f(\ln 3) = -3 \Rightarrow P(\ln 3 \mid -3)$

d) $f'(x) = 0{,}5e^{-x}$; $0{,}5e^{-x} = 0{,}25 \Rightarrow x = \ln 2$; $f(\ln 2) = -\frac{1}{4}$; $P\left(\ln 2 \mid -\frac{1}{4}\right)$

e) $f'(x) = e^{-2x}$; $e^{-2x} = 1 \Rightarrow x = 0$; $f(0) = -0{,}5$; $P(0 \mid -0{,}5)$

f) $f'(x) = 2e^{2x-1}$; $2e^{2x-1} = 0{,}5 \Leftrightarrow 2x - 1 = -\ln 4$

$\Rightarrow x = \frac{1 - \ln 4}{2} = \frac{1}{2} - \ln 2$; $f\left(\frac{1}{2} - \ln 2\right) = 2{,}25$; $P\left(\frac{1}{2} - \ln 2 \mid 2{,}25\right)$

K4/5 **5** **a)** Grafisch: $P_1(-3{,}7\,|\,1)$; $P_2(1\,|\,3{,}8)$

Rechnerisch: $f(x) = e^x + 1$

Geradengleichung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-2}{3-(-2)} = \frac{3}{5}$

$5 = \frac{3}{5} \cdot 3 + t \Rightarrow t = \frac{16}{5}$; $g(x) = \frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x + 1 = 0{,}6x + 3{,}2 \Leftrightarrow e^x - 0{,}6x - 2{,}2 = 0$

Hilfsfunktion: $h(x) = e^x - 0{,}6x - 2{,}2$; $h'(x) = e^x - 0{,}6$

Iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - 0{,}6x_n - 2{,}2}{e^{x_n} - 0{,}6}$

1. Startwert: $x_0 = -4$

Iterationswerte: $x_1 \approx -3{,}6246...$

$x_2 \approx -3{,}6221...$

$x_3 \approx -3{,}6221...$

$x_{S_1} \approx -3{,}62$; $y_{S_1} = f(x_{S_1}) \approx 1{,}03$;

$S_1(-3{,}62\,|\,1{,}03)$

2. Startwert: $x_0 = 1$

Iterationswerte: $x_1 \approx 1{,}0385...$

$x_2 \approx 1{,}0376...$

$x_3 \approx 1{,}0376...$

$x_{S_2} \approx 1{,}04$; $y_{S_2} = f(x_{S_2}) \approx 3{,}82$;

$S_2(1{,}04\,|\,3{,}82)$

b) Grafisch: $P(-1\,|\,1{,}7)$

Rechnerisch: $f(x) = e^{-x} - 1$

Geradengleichung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-0}{1-(-2)} = \frac{5}{3}$

$5 = \frac{5}{3} \cdot 1 + t \Rightarrow t = \frac{10}{3}$; $g(x) = \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{-x} - 1 = \frac{5}{3}x + \frac{10}{3} \Leftrightarrow e^{-x} - \frac{5}{3}x - \frac{13}{3} = 0$

Hilfsfunktion: $h(x) = e^{-x} - \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$; $h'(x) = -e^{-x} - \frac{5}{3}$

Iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - \frac{5}{3}x_n - \frac{13}{3}}{-e^{-x_n} - \frac{5}{3}}$

Startwert: $x_0 = -1$

Iterationswerte: $x_1 \approx -0{,}9882...$

$x_2 \approx -0{,}9881...$

$x_3 \approx -0{,}9881...$

$x_S \approx -0{,}99$; $y_S = f(x_S) \approx 1{,}69$; $S(-0{,}99\,|\,1{,}69)$

c) Grafisch: $P(1\,|\,0{,}2)$

Rechnerisch: $f(x) = -e^x + 3$

Geradengleichung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-2)}{2-(-2)} = \frac{3}{4}$

$1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + t \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$; $g(x) = 0{,}75x - 0{,}5$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -e^x + 3 = 0{,}75x - 0{,}5 \Leftrightarrow -e^x - 0{,}75x + 3{,}5 = 0$

Hilfsfunktion: $h(x) = -e^x - 0{,}75x + 3{,}5$; $h'(x) = -e^x - 0{,}75$

Iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{-e^{x_n} - 0{,}75x_n + 3{,}5}{-e^{x_n} - 0{,}75}$

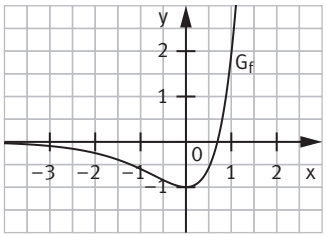
Startwert: $x_0 = 1$

Iterationswerte: $x_1 \approx 1{,}009...$

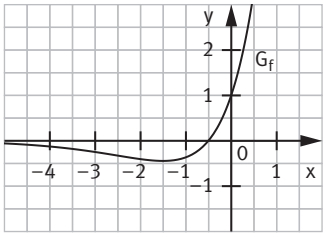
$x_2 \approx 1{,}009...$

$x_S \approx 1{,}01$; $y_S = f(x_S) \approx 0{,}26$; $S(1{,}01\,|\,0{,}26)$

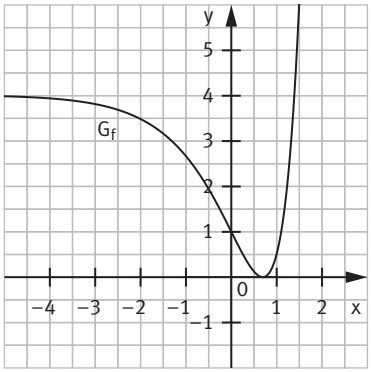
K4/5 **6** **a)** Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 2) = 0 \Rightarrow x = \ln 2$; $N(\ln 2 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -1$; $S_y(0 \mid -1)$
Ableitungen: $f'(x) = e^x \cdot (e^x - 2) + e^x \cdot e^x = 2e^x(e^x - 1)$;
$f''(x) = 2e^x \cdot (e^x - 1) + 2e^x \cdot e^x = 2e^x(2e^x - 1)$
Extrempunkt: $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$; $f''(0) = 2 > 0$; $f(0) = -1$. G_f hat einen Tiefpunkt $T(0 \mid -1)$.
Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Rightarrow 2e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = \ln 0{,}5 = -\ln 2$ ist Nullstelle von f'' mit VZW
$f(-\ln 2) = -\frac{3}{4}$; G_f hat einen Wendepunkt $W\left(-\ln 2 \middle| -\frac{3}{4}\right)$.
Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} [e^x \cdot (e^x - 2)] = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [e^x \cdot (e^x - 2)] = +\infty$.



b) Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -0{,}5$; $N(-0{,}5 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1$; $S_y(0 \mid 1)$
Ableitungen: $f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x + 1) \cdot e^x = (2x + 3)e^x$
$f''(x) = 2 \cdot e^x + (2x + 3) \cdot e^x = (2x + 5)e^x$
Extrempunkt: $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1{,}5$; $f''(-1{,}5) = 2e^{-1{,}5} > 0$; $f(-1{,}5) = -2e^{-1{,}5}$.
G_f hat einen Tiefpunkt $T(-1{,}5 \mid -2e^{-1{,}5})$.
Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -2{,}5$ ist Nullstelle mit VZW von f''.
$f(-2{,}5) = -4e^{-2{,}5}$; G_f hat einen Wendepunkt $W(-2{,}5 \mid -4e^{-2{,}5})$.



c) Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow 2 - e^x = 0 \Rightarrow x = \ln 2$; $N(\ln 2 \mid 0)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1$; $S_y(0 \mid 1)$
Ableitungen: $f'(x) = 2 \cdot (2 - e^x) \cdot (-e^x) = 2e^x(e^x - 2)$;
$f''(x) = 2e^x(e^x - 2) + 2e^x \cdot e^x = 4e^x(e^x - 1)$
Extrempunkt: $f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - e^x = 0 \Rightarrow x = \ln 2$; $f''(\ln 2) = 8$; $f(\ln 2) = 0$;
G_f hat einen Tiefpunkt $T(\ln 2 \mid 0) = N$.
Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0 \Rightarrow x = 0$ ist Nullstelle mit VZW von f''.
G_f hat einen Wendepunkt $W(0 \mid 1) = S_y$.



K1/6 **7** **a)** • Spiegelung an der y-Achse: $f_1^*(x) = f^*(-x) = e^{-x}$
- Streckung mit dem Faktor 2 in x-Richtung: $f_2^*(x) = f_1^*(2x) = e^{-2x}$
- Streckung mit dem Faktor 0,5 in y-Richtung: $f_3^*(x) = 0{,}5f_2^*(x) = 0{,}5e^{-2x}$
- Verschiebung um 1 LE in positive y-Richtung: $f_4^*(x) = f_3^*(x) + 1 = 0{,}5e^{-2x} + 1 = f(x)$

Eigenschaften:
- Wertemenge: $W_f =]1;+\infty[$
- Schnittpunkt mit der y-Achse $P_y(0|1{,}5)$
- kein Schnittpunkt mit der x-Achse
- keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems
- keine Extrempunkte, keine Wendepunkte
- G_f ist streng monoton steigend

b) Die Funktion f besitzt keine Nullstellen, da G_f aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion durch Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 1 LE in positive y-Richtung hervorgeht und die natürliche Exponentialfunktion ebenfalls keine Nullstellen besitzt.

c) Tangentengleichung: $f'(x) = -e^{-2x}$; $f'(0) = -1$; $f(0) = 1{,}5$
Tangentengleichung: t_S: $y = -x + 1{,}5$
Schnittpunkt von t_S mit der x-Achse: $P_x(1{,}5|0)$
Beide Achsen werden von t_S an der Stelle 1,5 geschnitten. Daher ist das Dreieck gleichschenklig.

K5 **8** **a)** $P(1|e^4)$: $f_k(1) = e^k = e^4 \Rightarrow k = 4$
$Q(2|2)$: $f_k(2) = 2e^{2k} = 2 \Rightarrow k = 0$

b) $f_k'(x) = 1 \cdot e^{kx} + x \cdot e^{kx} \cdot k = e^{kx}(1 + kx)$; $f_k'(3) = e^{3k}(1 + 3k) = 0$
Für $k = -\frac{1}{3}$ hat der Graph der Funktion eine Extremstelle bei $x_0 = 3$.

K5/6 **9** **a)** Einsetzen der Koordinaten von A und B in $f_{a,b}(x)$ liefert:
$f(0) = ae^0 = 2 \Rightarrow a = 2$; $f(1) = 2e^b = 4 \Rightarrow b = \ln 2$

b) $f(1) = -2 \Leftrightarrow ae^b = -2$ (I)
$f'(x) = abe^{bx}$; $f'(1) = -1 \Leftrightarrow abe^b = -1$ (II)
Einsetzen von (I) in (II): $-2b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$
In (I): $a = -2e^{-0{,}5}$

c) Einsetzen der Koordinaten von A und B in $f_{a,b}(x)$ liefert:
$f(-2) = 6 \Leftrightarrow ae^{-2b} = 6$ (I)
$f(1) = 3 \Leftrightarrow ae^b = 3$ (II)
(II) : (I): $e^{3b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{3}\ln 2$
In (II): $a \cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow a = 3\sqrt[3]{2}$

K3/6 **10** **a)** Mögliche Lösungen:
Gemeinsamkeiten:
- Beide Gemeinden haben am Anfang die gleiche Anzahl an infizierten Personen.
- Beide Gemeinden haben nach sehr langer Zeit die gleiche Anzahl an Infizierten.

Unterschiede:
- Der maximale Anstieg der Infizierten in der Gemeinde mit k_1 ist größer als der maximale Anstieg der Infizierten in der anderen Gemeinde.

b) $a = f_k(0) = \frac{10}{11}$; $b = \lim\limits_{t \to +\infty} f_k(t) = 10$

c) Der Wendepunkt jedes Graphen ist der Punkt des Graphen mit der größten Steigung.
Zum Zeitpunkt t_{W_k} ist der Anstieg der Infizierten daher am größten.

d) 1 $f'_{k_1}(t_{W_1}) > f'_{k_2}(t_{W_2})$: Der maximale Anstieg der Infizierten in der Gemeinde mit k_1 ist größer als der maximale Anstieg der Infizierten in der anderen Gemeinde.

2 $f_{k_1}(1) > f_{k_1}(1)$: Die Gemeinde 1 hat nach einer Woche mehr Infizierte als die Gemeinde 2.

3 $k_1 > k_2$: Für einen höheren Wert von k steigen auch die Infektionszahlen schneller an.

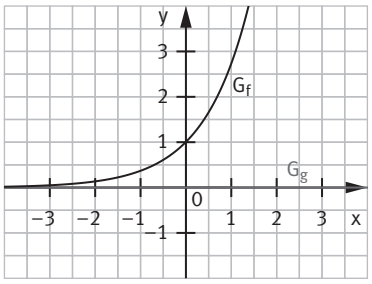
K5/6

11 a) 1 $f(x) - g(x) < 0{,}1 \Leftrightarrow e^x < 0{,}1 \Rightarrow x < \ln 0{,}1$

2 $f(x) - g(x) < 0{,}01 \Leftrightarrow e^x < 0{,}01 \Rightarrow x < \ln 0{,}01$

3 $f(x) - g(x) < \varepsilon \Leftrightarrow e^x < \varepsilon \Rightarrow x < \ln \varepsilon$

Die x-Achse ist waagrechte Asymptote von G_f für $x \to -\infty$.

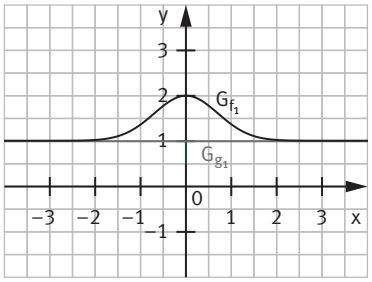


b) 1 $f(x) - g(x) < 0{,}1 \Leftrightarrow e^{-x^2} < 0{,}1 \Leftrightarrow x^2 > \ln 0{,}1 \Rightarrow |x| > \sqrt{\ln 0{,}1}$

2 $f(x) - g(x) < 0{,}01 \Leftrightarrow e^{-x^2} < 0{,}01 \Leftrightarrow x^2 > \ln 0{,}01 \Rightarrow |x| > \sqrt{\ln 0{,}01}$

3 $f(x) - g(x) < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 > \ln \varepsilon \Rightarrow |x| > \sqrt{\ln \varepsilon}$

Die Gerade mit der Gleichung y = a ist waagrechte Asymptote von G_f für $x \to \pm\infty$.

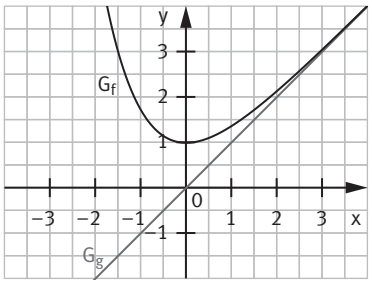


c) 1 $f(x) - g(x) < 0{,}1 \Leftrightarrow e^{-x} < 0{,}1 \Rightarrow x > -\ln 0{,}1$

2 $f(x) - g(x) < 0{,}01 \Leftrightarrow e^{-x} < 0{,}01 \Rightarrow x > -\ln 0{,}01$

3 $f(x) - g(x) < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-x} < \varepsilon \Rightarrow x > -\ln \varepsilon$

Die Gerade mit der Gleichung y = x ist schiefe Asymptote von G_f für $x \to +\infty$.

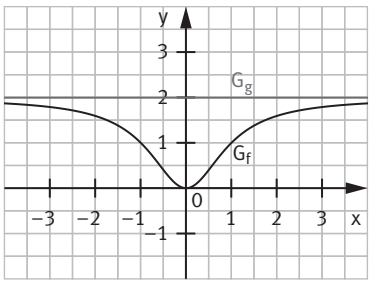


d) 1 $f(x) - g(x) < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+1} < 0{,}1 \Rightarrow |x| > \sqrt{19}$

2 $f(x) - g(x) < 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+1} < 0{,}01 \Rightarrow |x| > \sqrt{199}$

3 $f(x) - g(x) < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+1} < \varepsilon \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$

Die Gerade mit der Gleichung y = 2 ist waagrechte Asymptote von G_f für $x \to \pm\infty$.



K4/5

12 Flächeninhalt: $A_{PIA} = \frac{1}{2}a[f(a) - g(a)] = \frac{1}{2}a(e^a - e^{0{,}5a})$

Umfang für a = 2: $P(2\,|\,e^2)$, $I(0\,|\,1)$, $A(2\,|\,e)$

$|\overline{PA}| = (e^2 - e) \approx 4{,}67$; $|\overline{PI}| = \sqrt{2^2 + (e^2-1)^2} \approx 6{,}69$; $|\overline{AI}| = \sqrt{2^2 + (e-1)^2} \approx 2{,}64$

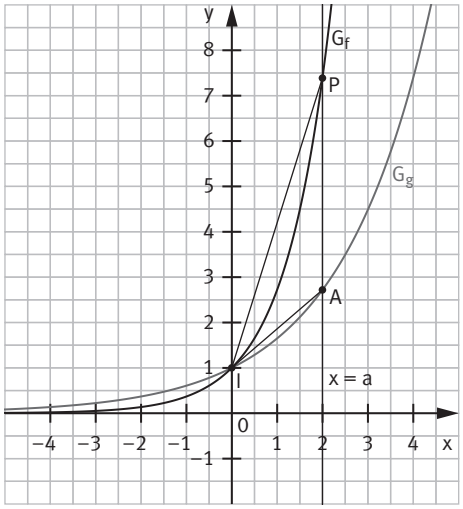
$U_{PIA} = |\overline{PA}| + |\overline{PI}| + |\overline{AI}| = (e^2 - e) + \sqrt{2^2 + (e^2-1)^2} + \sqrt{2^2 + (e-1)^2} \approx 14{,}0$

Der größte Innenwinkel des Dreiecks PIA besitzt den Scheitel A.

Mithilfe des Kosinussatzes gilt:

$|\overline{PI}|^2 = |\overline{PA}|^2 + |\overline{AI}|^2 - 2 \cdot |\overline{PA}| \cdot |\overline{AI}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|\overline{PA}|^2 + |\overline{AI}|^2 - |\overline{PI}|^2}{2 \cdot |\overline{PA}| \cdot |\overline{AI}|} \approx \frac{4{,}67^2 + 2{,}64^2 - 6{,}69^2}{2 \cdot 4{,}67 \cdot 2{,}64} \approx -0{,}65$

$\Rightarrow \alpha \approx 130{,}4°$



K2/5 **13 a)** Die Funktion f hat wegen des Faktors x^2 an der Stelle $x_0 = 0$ eine Nullstelle ohne VZW, d. h. G_f berührt die x-Achse im Ursprung. Wegen $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist der Ursprung ein Tiefpunkt.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) Ableitungen: $f'(x) = 2x \cdot e^{2-x} + x^2 \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = xe^{2-x}(2 - x)$;

$f''(x) = 2 \cdot e^{2-x} + 2x \cdot e^{2-x} \cdot (-1) - [2x \cdot e^{2-x} + x^2 \cdot e^{2-x} \cdot (-1)] = e^{2-x}(2 - 4x + x^2)$

Extrempunkte: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{2-x}(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$;

Monotonietabelle:

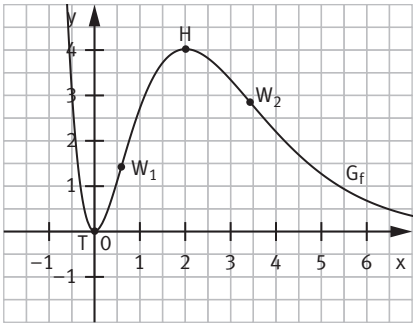
	$x < 0$	$x_1 = 0$	$0 < x < 2$	$x_2 = 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$f'(-1) = -3e^3 < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f'(1) = e > 0$ +	0 VZW von + nach –	$f'(3) = -\frac{3}{e} < 0$ –
G_f	↘	T (0 | 0)	↗	H (2 | 4)	↘

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$

Krümmungstabelle:

	$x < 2 - \sqrt{2}$	$x_1 = 2 - \sqrt{2}$	$2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$	$x_2 = 2 + \sqrt{2}$	$x > 2 + \sqrt{2}$
$f''(x)$	$f''(0) = 2e^2 > 0$ +	0 VZW von + nach –	$f''(2) = -2 < 0$ –	0 VZW von – nach +	$f''(4) = \frac{10}{e^2} > 0$ +
G_f	linksgekrümmt	$W_1 (x_1 \mid f(x_1))$	rechtsgekrümmt	$W_2 (x_2 \mid f(x_2))$	linksgekrümmt

$f(x_1) \approx 1{,}411$; $f(x_2) \approx 2{,}834 \Rightarrow W_1 (2 - \sqrt{2} \mid 1{,}411)$; $W_2 (2 + \sqrt{2} \mid 2{,}834)$



c) $A(u) = \frac{1}{2}u \cdot f(u) = \frac{1}{2}u^3 e^{2-u}$

$A'(u) = \frac{3}{2}u^2 \cdot e^{2-u} + \frac{1}{2}u^3 \cdot e^{2-u} \cdot (-1) = \frac{1}{2}u^2 e^{2-u}(3-u)$

$A''(u) = 3u \cdot e^{2-u} + \frac{3}{2}u^2 \cdot e^{2-u} \cdot (-1) - \left[\frac{3}{2}u^2 \cdot e^{2-u} + \frac{1}{2}u^3 \cdot e^{2-u} \cdot (-1)\right] = \frac{1}{2}ue^{2-u}(6 - 6u + u^2)$

$A'(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u^2e^{2-u}(3-u) = 0 \Rightarrow u_1 = 3;\ u_2 = 0$

$A(0) = 0;\ A''(3) = -\frac{9}{2u} < 0;\ A(3) = \frac{27}{2e}$.

Das Dreieck hat für $u = 3$ seinen maximalen Flächeninhalt mit $A(3) = \frac{27}{2e} \approx 5$ [FE].

$\lim\limits_{u \to +\infty} A(u) = \lim\limits_{u \to +\infty} \left[\frac{1}{2}u^3e^{2-u}\right] = 0$

K2/5

14 a) 1 Substitution: $u = x^2$: $u^2 + 3u - 4 = 0 \Leftrightarrow (u+4)(u-1) = 0 \Rightarrow u_1 = -4;\ u_2 = 1$

Resubstitution: $u_1 = -4 = x^2$ hat keine Lösung.

$u_2 = 1 = x^2 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1$ $\quad L = \{-1; 1\}$

2 Substitution: $u = e^x$: $u^2 + 3u - 4 = 0 \Rightarrow u_1 = -4;\ u_2 = 1$

Resubstitution: $u_1 = -4 = e^x$ hat keine Lösung.

$u_2 = 1 = e^x \Rightarrow x = \ln 1 = 0$ $\quad L = \{0\}$

b) 1 Substitution: $u = e^x$: $u^2 - 5u + 4 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(u-4) = 0 \Rightarrow u_1 = 1;\ u_2 = 4$

Resubstitution: $u_1 = 1 = e^x \Rightarrow x_1 = \ln 1 = 0$;

$u_2 = 4 = e^x \Rightarrow x_2 = \ln 4$ $\quad L = \{0; \ln 4\}$

2 $e^{3x} + 3e^{2x} - 4e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^{2x} + 3e^x - 4) = 0$

Substitution: $u = e^x$: $(u^2 + 3u - 4)u = 0 \Leftrightarrow u(u+4)(u-1) = 0 \Rightarrow u_1 = -4;\ u_2 = 0;\ u_3 = 1$

Resubstitution: $u_1 = -4 = e^x$ hat keine Lösung.

$u_2 = 0 = e^x$ hat keine Lösung.

$u_3 = 1 = e^x \Rightarrow x = \ln 1 = 0$ $\quad L = \{0\}$

3 $e^x + e^{-x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$

Substitution: $u = e^x$: $u^2 - 4u + 1 = 0 \Rightarrow u_1 = 2 - \sqrt{3};\ u_2 = 2 + \sqrt{3}$

Resubstitution: $u_1 = 2 - \sqrt{3} = e^x \Rightarrow x_1 = \ln(2 - \sqrt{3})$

$u_2 = 2 + \sqrt{3} = e^x \Rightarrow x_2 = \ln(2 + \sqrt{3})$

4 $e^{2x} - e^{x+2} + 3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^2 \cdot e^x + 3 = 0$

Substitution: $u = e^x$: $u^2 - e^2u + 3 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = \frac{e^2 \pm \sqrt{e^4 - 12}}{2}$

Resubstitution: $u_1 = \frac{e^2 - \sqrt{e^4 - 12}}{2} = e^x \Rightarrow x_1 = \ln\frac{e^2 - \sqrt{e^4 - 12}}{2}$

$u_2 = \frac{e^2 - \sqrt{e^4 - 12}}{2} = e^x \Rightarrow x_2 = \ln\frac{e^2 + \sqrt{e^4 - 12}}{2}$ $\quad L = \left\{\ln\frac{e^2 - \sqrt{e^4 - 12}}{2}; \ln\frac{e^2 + \sqrt{e^4 - 12}}{2}\right\}$

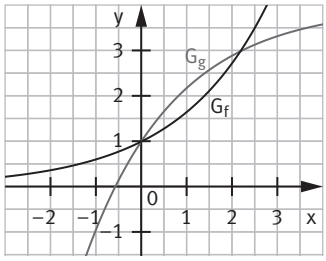
5 $e^x + \frac{9}{e^x} = 6 \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 9 = 0$

Substitution: $u = e^x$: $u^2 - 6u + 9 = 0 \Leftrightarrow (u-3)^2 = 0 \Rightarrow u = 3$

Resubstitution: $u = 3 = e^x \Rightarrow x = \ln 3$ $\quad L = \{\ln 3\}$

6 $\sqrt{e^x} - \frac{e^3}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = e^{3-x} \Rightarrow 0{,}5x = 3 - x \Rightarrow x = 2$ $\quad L = \{2\}$

K2/4 **15 a)** Schnittpunkte mit der y-Achse:



$f(0) = 1$; $g(0) = 1 \Rightarrow S_{y,f}(0\,|\,1)$; $S_{y,g}(0\,|\,1)$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = 0$ hat keine Lösung.

Die Funktion f hat keine Nullstelle.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 3e^{-0,5x} = 0 \Rightarrow e^{-0,5x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = -2\ln\frac{4}{3}$

$\Rightarrow N_g\left(-2\ln\frac{4}{3}\,\middle|\,0\right)$

Schnittpunkte von G_f und G_g: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{0,5x} = 4 - 3e^{-0,5x} \Leftrightarrow e^x - 4e^{0,5x} + 3 = 0$

Substitution $u = e^{0,5x}$: $u^2 - 4u + 3 = 0 \Rightarrow u_1 = 1;\ u_2 = 3$

Resubstitution: $u_1 = 1 = e^{0,5x} \Rightarrow x_B = 0,\ f(0) = 1$

$u_2 = 3 = e^{0,5x} \Rightarrow x_A = 2\ln 3;\ f(2\ln 3) = 3$

$A(2\ln 3\,|\,3)$; $B(0\,|\,1)$

b) $|\overline{ST}|$ soll maximal werden.

Hilfsfunktion d mit $d(a) = g(a) - f(a) = 4 - 3e^{-0,5a} - e^{0,5a}$

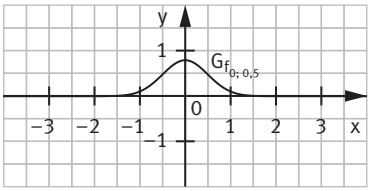
$d'(a) = 1{,}5e^{-0,5a} - 0{,}5e^{0,5a} = 0{,}5e^{-0,5a}(3 - e^a)$; $d'(a) = 0 \Rightarrow 3 - e^a = 0 \Rightarrow a = \ln 3$

$d''(a) = -0{,}75e^{-0,5a} - 0{,}25e^{0,5a} < 0$ für alle $a \in\ ]0;\ln 9[$.

Randbetrachtung: $\lim\limits_{a\to 0} d(a) = \lim\limits_{a\to \ln 9} d(a) = 0$

Die Strecke $\overline{ST}$ wird für $a = \ln 3$ maximal.

K2/5 **16 a)** Der Graph heißt Glockenkurve, da die Form an die Umrisse einer Glocke erinnert.



b) Der Parameter s verschiebt den Hochpunkt der Kurve in y-Richtung und staucht oder streckt die Kurve. m verschiebt die Kurve entlang der x-Achse.

c) Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s}e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}\right] = 0$

Extremstelle: $f'_{m,s}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s}\frac{2(m-x)}{2s^2}e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$;

$f'_{m,s}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s}\frac{2(m-x)}{2s^2}e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} = 0$

$\Rightarrow x = m$ ist Nullstelle von $f'_{m,s}$ mit VZW und damit Extremstelle von $f_{m,s}$.

d) $f_{m,s}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s}$; $f_{m,s}(x) = \frac{1}{2}f_{m,s}(m) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s}e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s} \Leftrightarrow e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} = 0{,}5 \Rightarrow \frac{(x-m)^2}{2s^2} = \ln 2$

$\Rightarrow x_{1/2} = m \pm \sqrt{2s^2\ln 2}$

Halbwertsbreite: $h = |x_1 - x_2| = 2\sqrt{2s^2\ln 0{,}5}$; h ist unabhängig von m

Entdecken

K3/5 ■ Verdoppelung: $1{,}14^t = 2 \Rightarrow \log_{1{,}14} 2 \approx 5{,}29$ [Wochen]

K3/5 ■ $B_0 \cdot e^{t \cdot \ln 1{,}14} = B_0 \cdot e^{\ln (1{,}14)^t} = B_0 \cdot 1{,}14^t = B(t)$

Nachgefragt

K1/5 ■ Für z. B. $x = -1$ gilt dies nicht, da der Logarithmus von negativen Zahlen nicht existiert.

K1/6 ■ Eine exponentiell wachsende Größe würde für sehr große Zeiträume beliebig groß werden. Da in der Realität die Ressourcen (Platz, Nahrung, finanzielle Mittel, ...) begrenzt sind, kann exponentielles Wachstum nie beliebig lange andauern.

Aufgaben

K5 **1** **a)** $f(x) = 2 \cdot 3^x = 2 \cdot e^{x \ln 3}$ **b)** $f(x) = -3 \cdot 2^{2x} = -3 \cdot e^{2x \ln 2}$

c) $f(x) = 2^{2x} \cdot 4^x = 4^x \cdot 4^x = 4^{2x} = e^{2x \ln 4}$ **d)** $f(x) = 0{,}25^x = e^{-x \ln 4}$

e) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x = -2^{-x} = -e^{-x \ln 2}$ **f)** $f(x) = 5 \cdot 3^{-2x} = 5 \cdot e^{-2x \ln 3}$

K5 **2** **a)** $f(x) = 2^x = e^{x \ln 2}$; $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2}$; $f'(3) = \ln 2 \cdot e^{3 \ln 2} \approx 5{,}55$

b) $f(x) = 5^x = e^{x \ln 5}$; $f'(x) = \ln 5 \cdot e^{x \ln 5}$; $f'(1) = \ln 5 \cdot e^{\ln 5} = 5 \ln 5 \approx 8{,}05$

c) $f'(x) = 4e^{4x}$; $f'(e) = 4e^{4e} \approx 210\,959{,}55$

d) $f(x) = 2{,}5^x = e^{x \ln 2{,}5}$; $f'(x) = \ln 2{,}5 \cdot e^{x \ln 2{,}5}$; $f'(0{,}5) = \ln 2{,}5 \cdot e^{0{,}5 \ln 2{,}5} \approx 1{,}45$

e) $f(x) = 0{,}25^x = e^{x \ln 0{,}25} = e^{-x \ln 4}$; $f'(x) = -\ln 4 \cdot e^{-x \ln 4}$; $f'(2{,}5) = -\ln 4 \cdot e^{-2{,}5 \ln 4} \approx -0{,}04$

f) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^x = \frac{1}{4} e^{-x}$; $f'(x) = -\frac{1}{4} e^{-x}$; $f'(0) = -\frac{1}{4}$

K5 **3** **a)** $f(x) = e^{2x} = \left(e^2\right)^x \Rightarrow a = e^2 \approx 7{,}389$

b) $f(x) = \frac{4}{e^{3x}} = 4e^{-3x} = 4\left(e^{-3}\right)^x \Rightarrow a = e^{-3} \approx 0{,}050$

c) $f(x) = 2e^{-0{,}5x} = 2\left(e^{-0{,}5}\right)^x \Rightarrow a = e^{-0{,}5} \approx 0{,}607$

d) $f(x) = 3e^{0{,}1x} = 3\left(e^{0{,}1}\right)^x \Rightarrow a = e^{0{,}1} \approx 1{,}105$

K1/4 **4** 1 – C, da dies der einzige Graph mit $f(0) = 2$ ist.

2 – A, da dies der einzige Graph mit $f(-2) = 1$ ist.

3 – D, da dies der einzige Graph mit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ist.

4 – B, da dies der einzige Graph ist, der durch den Ursprung verläuft.

K3/5 **5** **a)** Quotient benachbarter Funktionswerte:

$\frac{0{,}3}{0{,}2} = 1{,}5$; $\frac{0{,}48}{0{,}3} = 1{,}6$; $\frac{0{,}8}{0{,}48} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$; $\frac{1{,}2}{0{,}8} = 1{,}5$

Das Wachstum der Kresse kann somit näherungsweise mithilfe einer Exponentialfunktion h(t) (h in cm; t in Tagen) mit dem Wachstumsfaktor 1,6 und der Anfangshöhe 0,2 cm beschrieben werden: $h(t) = 0{,}2 \cdot 1{,}6^t$.

b) Die mittlere Wachstumsrate in der ersten Woche ist der Differenzenquotient im Intervall $[0; 7]$: $\frac{h(7) - h(0)}{7 - 0} = \frac{4{,}2 - 0{,}2}{7} = \frac{4}{7}\left[\frac{\text{cm}}{\text{Tag}}\right]$

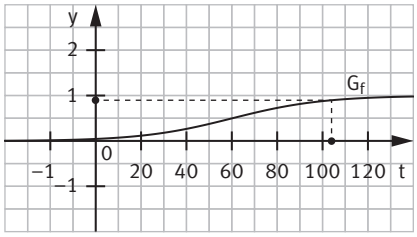
c) $h(t) = 0{,}2 \cdot 1{,}6^t = 0{,}2 \cdot e^{t \cdot \ln 1{,}6}$; $h'(t) = 0{,}2 \ln 1{,}6 \cdot e^{t \cdot \ln 1{,}6}$; $h'(2) = 0{,}2 \ln 1{,}6 \cdot e^{2 \cdot \ln 1{,}6} \approx 0{,}24 \left[\frac{\text{cm}}{\text{Tag}}\right]$

K3/4 **6** Maximaler Durchmesser: $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t) = 1$

Grafisch: $t \approx 105$ [Jahre]

Rechnerisch: $d(t) = 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-0{,}05(t-60)}} = 0{,}9 \Leftrightarrow 1 = 0{,}9 + 0{,}9e^{-0{,}05(t-60)} \Leftrightarrow 0{,}1 = 0{,}9e^{-0{,}05(t-60)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9} = e^{-0{,}05(t-60)} \Rightarrow t = -\frac{\ln\frac{1}{9}}{0{,}05} + 60 = \frac{\ln 9}{0{,}05} + 60 \approx 103{,}9$



K3/6 **7** **a)** 1 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{10}{20e^{-0{,}5t}+1} = 10$

Die Influencerin kann langfristig mit 10 000 „Fans“ rechnen.

2 $f'(t) = \frac{(20+e^{0{,}5t})\cdot 5e^{0{,}5t} - 10e^{0{,}5t}\cdot 0{,}5e^{0{,}5t}}{(20+e^{0{,}5t})^2} = \frac{100e^{0{,}5t}}{(20+e^{0{,}5t})^2}$

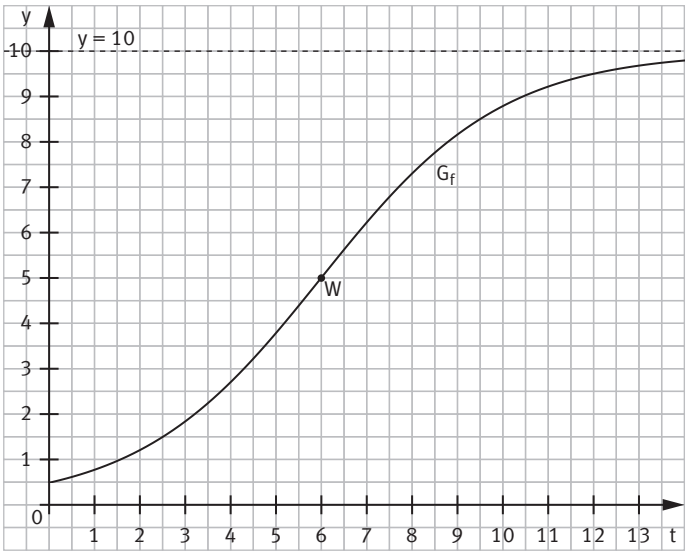
$f''(t) = \frac{(20+e^{0{,}5t})^2\cdot 50e^{0{,}5t} - 100e^{0{,}5t}\cdot 2(20+e^{0{,}5t})\cdot 0{,}5e^{0{,}5t}}{(20+e^{0{,}5t})^4} = \frac{50e^{0{,}5t}(20-e^{0{,}5t})}{(20+e^{0{,}5t})^3}$

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{50e^{0{,}5t}(20-e^{0{,}5t})}{(20+e^{0{,}5t})^3} \Rightarrow e^{0{,}5t} = 20 \Rightarrow t = 2\ln 20 \approx 5{,}99$

ist Nullstelle von f′ mit VZW von positiven zu negativen Werten.

Der Anstieg der „Fans“ ist am 6. Tag am größten.

b)



c) Der Verlauf der Kurve entspricht dem, den man häufig bei der Ausbreitung von Infektionskrankheiten (die z. B. durch Viren ausgelöst werden) erhält.
Individuelle Diskussionsergebnisse

K2/5 **8** **a)** Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_a(0) = (0^2 - 3)a^0 = -3$; $S_y(0|-3)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)a^x = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$;
$N_1(-\sqrt{3}|0)$; $N_2(\sqrt{3}|0)$

Verhalten für betragsgroße Werte von x:

Für $0 < a < 1$ gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$.

Für $a > 1$ gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$.

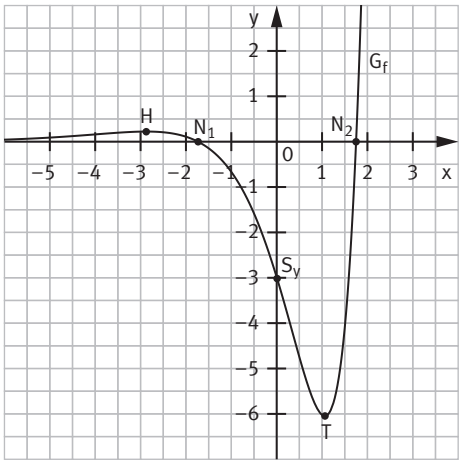
b) Extrempunkte: $f_3(x) = (x^2 - 3) \cdot 3^x = (x^2 - 3) \cdot e^{x \cdot \ln 3}$

$f_3'(x) = 2x \cdot e^{x \cdot \ln 3} + (x^2 - 3) \cdot e^{x \cdot \ln 3} \cdot \ln 3 = e^{x \ln 3}(x^2 \cdot \ln 3 + 2x - 3\ln 3) = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 12(\ln 3)^2}}{2 \ln 3}$; $x_1 \approx -2{,}87$; $x_2 \approx 1{,}05$

Monotonietabelle (gerundete Werte):

x	$x < -2{,}87$	$x = -2{,}87$	$-2{,}87 < x < 1{,}05$	$x = 1{,}05$	$x > 1{,}05$
$f'(x)$	$f'(-3) = \frac{2}{9}(\ln 3 - 1)$ $\approx 0{,}02 > 0$ +	0 VZW von + nach −	$f'(0) = -3\ln 3$ < 0 −	0 VZW von − nach +	$f'(2) = 9(\ln 3 + 4)$ > 0 +
G_f	↗	H (−2,87 | 0,22)	↘	T (1,05 | −6,01)	↗



c) $f_a(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{x \ln a}$; $f_a'(x) = 2xe^{x \ln a} + (x^2 - 3)e^{x \ln a} \cdot \ln a = e^{x \ln a}(\ln a \cdot x^2 + 2x - 3\ln a)$; $f_a'(0) = -3$
$\Leftrightarrow -3\ln a = -3 \Rightarrow a = e$

d) $f_a(-x) = ((-x)^2 - 3)a^{-x} = (x^2 - 3)\left(\frac{1}{a}\right)^x = f_{\frac{1}{a}}(x)$

K3/5 **9** **a)** Mögliche Lösung:

Ansatz: $f(t) = 120 \cdot e^{kt} + 24$ mit t: Zeit in Minuten ab Beginn des Vorgangs; f(t) in °C

$f(1) = 105 \Leftrightarrow 120 \cdot e^k + 24 = 105 \Leftrightarrow e^k = \frac{27}{40} \Rightarrow k = \ln\frac{27}{40} \approx -0{,}39$

$f(t) = 120e^{-0{,}39t} + 24$

b) Mögliche Lösung, abhängig von dem in Teilaufgabe a) gewählten Modell:

$f(t) = 40 \Leftrightarrow 120e^{-0{,}39t} + 24 = 40 \Leftrightarrow e^{-0{,}39t} = \frac{2}{15} \Rightarrow t = -\frac{1}{0{,}39}\ln\frac{2}{15} \approx 5{,}17$

Nach dem Modell hat die Pfanne nach etwa 5,2 Minuten eine Temperatur von 40 °C erreicht, d. h. sie benötigt zum Abkühlen von 105 °C auf 40 °C etwa 4,2 Minuten.

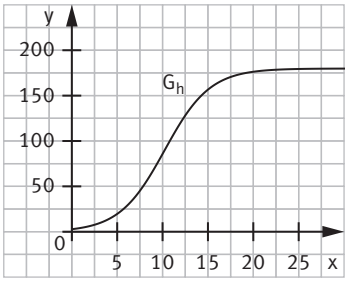
c) Individuelle Lösungen, abhängig vom gewählten Modell

K3/5 **10 a)** $h(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{180}{1 + ke^0} = 3 \Rightarrow k = 59$

$h(5) = 20 \Leftrightarrow \frac{180}{1 + 59e^{-5a}} = 20 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}\ln\frac{8}{59} \approx 0{,}4$

$h(x) = \frac{180}{1 + 59e^{-0{,}4x}}$

x (in Wochen)	0	5	10	12	15	20	25	30
Höhe h (in cm)	3,0	20,0	86,5	121,2	157,0	176,5	179,5	179,9



b) $h(x) = 50 \Leftrightarrow \frac{180}{1 + 59e^{-0{,}4x}} = 50 \Rightarrow x = -\frac{1}{0{,}4}\ln\frac{2{,}6}{59} \approx 7{,}8$ [Monate];

$h(x) = 100 \Leftrightarrow \frac{180}{1 + 59e^{-0{,}4x}} = 100 \Rightarrow x = -\frac{1}{0{,}4}\ln\frac{0{,}8}{59} \approx 10{,}75$ [Monate]

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{180}{1 + 59e^{-0{,}4x}} = 180$ [cm]

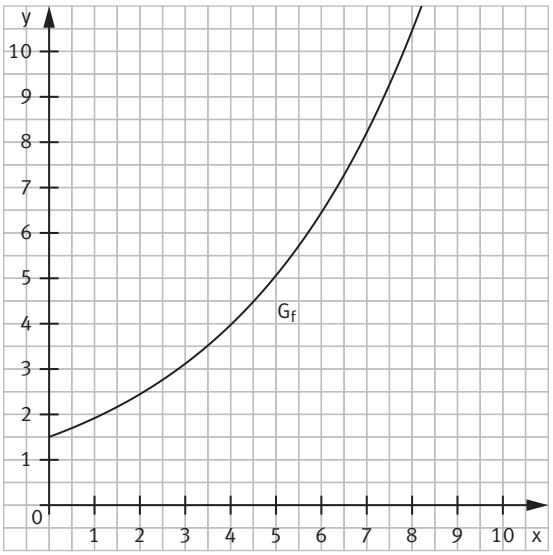
d) $h'(x) = -\frac{180}{(1 + 59e^{-0{,}4x})^2} \cdot 59e^{-0{,}4x} \cdot (-0{,}4) = \frac{4248e^{-0{,}4x}}{(1 + 59e^{-0{,}4x})^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$

In der Realität endet das Wachstum einer Pflanze zu einem bestimmten Zeitpunkt, ab dem ihre Wachstumsgeschwindigkeit dann null ist.

e) Der Zeitpunkt, zu dem $h''(x) = 0$ gilt, ist der Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze den größten Wert erreicht.

K3/6 **11 a)** $f(x) = 1{,}5e^{x \ln 1{,}05}$

x: Zeit in Jahren ab 2023; f(x): Bevölkerung in Mio.



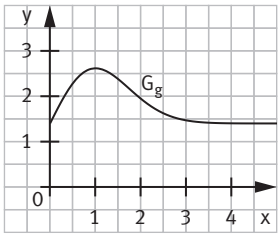
b) Die Ableitung beschreibt das jährliche Bevölkerungswachstum zu einem Zeitpunkt x in Mio./Jahr.

c) $f(x) = 10 \Leftrightarrow 1{,}5e^{x \ln 1{,}05} = 10 \Rightarrow x = \frac{\ln\frac{20}{3}}{\ln 1{,}05} \approx 38{,}9$

Mögliche Lösung zu den Grenzen des Modells: Auf unbegrenzte Zeit ist ein exponentielles Wachstum aufgrund beschränkter Ressourcen in der Stadt nicht möglich.

d) Individuelle Ergebnisse

K3/4 **12 a)**



Langfristig wird die Bevölkerungszahl schrumpfen, da die Geburtenziffer unter den Wert von 2,1 fällt, da gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1{,}4$.

b) Stärkste Abnahme bei etwa x = 1,7, d. h. im Jahr 2012.

Rechnerisch: Man bestimmt die zweite Ableitungsfunktion g″ von g und weist nach, dass diese für x > 1,7 wieder positive Werte hat.

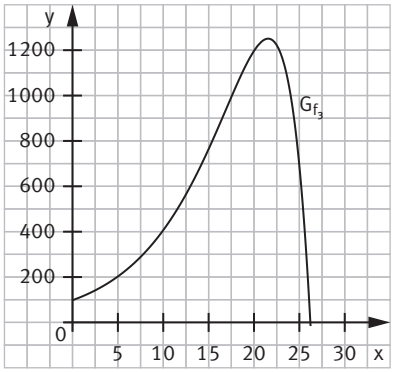
K1/3 **13 a)** Die Schädlingspopulation wächst zunächst vermutlich exponentiell an (zu Beginn langsam, dann zunehmend schneller), bis der Anstieg um den 22. Tag beendet wird. Danach geht der Bestand innerhalb von etwa 5 Tagen auf null zurück.

Es ist nicht bekannt, nach wie langer Zeit das eingesetzte Schädlingsbekämpfungsmittel seine Wirkung entfaltet. Da der Rückgang der Population etwa am 21. Tag einsetzt, muss das Mittel spätestens an diesem Tag eingesetzt worden sein. Ab etwa dem 12. Tag verläuft der Graph zunehmend flacher, als man es bei einer exponentiellen Entwicklung erwarten würde. Dies könnte darauf hindeuten, dass das Mittel etwa zwischen dem 12. und dem 21. Tag eingesetzt wurde.

b) f_3 beschreibt den Graphen am besten, da für die anderen beiden Funktionen gilt $\lim\limits_{t \to +\infty} f_1(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} f_2(t) = +\infty$.

Definitionsbereich: $f_3(26) \approx 59{,}0$; $f_3(26{,}1) \approx -15{,}0$

Im Sachkontext sinnvolle Definitionsmenge etwa: $D_{f_3} = [0; 26{,}1]$



c) $f_3'(6) \approx 33$. Die Schädlingspopulation erhöht sich an Tag 6 um etwa 33.

d) $f_3'(t) = 15e^{0{,}15t} - 0{,}6e^{0{,}3t}$; $f_3''(t) = 2{,}25e^{0{,}15t} - 0{,}18e^{0{,}3t}$

$f_3'(t) = 0 \Leftrightarrow 15e^{0{,}15t} - 0{,}6e^{0{,}3t} = 0 \Leftrightarrow 0{,}6e^{0{,}15t}(25 - e^{0{,}15t}) = 0$

$\Rightarrow t = \frac{\ln 25}{0{,}15} \approx 21{,}46$; $f_3''\left(\frac{\ln 25}{0{,}15}\right) \approx -56{,}25 < 0$; $f_3\left(\frac{\ln 25}{0{,}15}\right) = 1250$

Die maximale Schädlingspopulation beträgt 1250.

e) $f_3''(t) = 0 \Leftrightarrow 2{,}25e^{0{,}15t} - 0{,}18e^{0{,}3t} = 0 \Rightarrow 0{,}18e^{0{,}15t}(12{,}5 - e^{0{,}15t}) = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln 12{,}5}{0{,}15} \approx 16{,}84$ ist Nullstelle von f_3' mit VZW von positiven zu negativen Werten.

$f_3\left(\frac{\ln 12{,}5}{0{,}15}\right) = 937{,}5$. Am Punkt $\left(\frac{\ln 12{,}5}{0{,}15} \middle| 937{,}5\right)$ hat G_{f_3} seine größte Steigung.

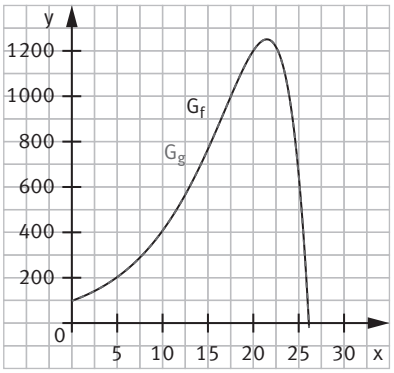
Die Schädlingspopulation hat nach rund 16,8 Tagen seine größte Wachstumsrate.

f) $2\,e^{0{,}3t}(50e^{-0{,}15t} - 1) = 100e^{0{,}15t} - 2e^{0{,}3t} = f_3(t)$

$f_3(t) = 0 \Rightarrow 50e^{-0{,}15t} - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{\ln 50}{0{,}15} \approx 26{,}08$

Nach rund 26 Tagen sind keine Schädlinge mehr vorhanden.

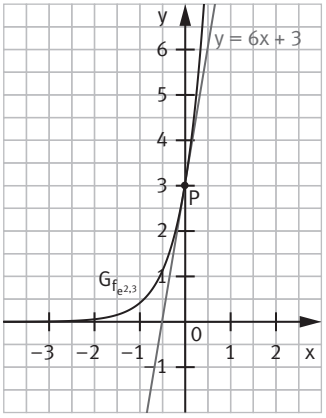
g) Die Graphen sind fast identisch, sie unterscheiden sich in diesen Größenordnungen der Werte nur minimal, da $e^{0,3} = 1{,}3498... \approx 1{,}35$ gilt. Von der Funktion f_3 ist es einfacher die Ableitungen zu bilden, da man hier direkt die Ableitungsregel für die natürliche Exponentialfunktion nutzen kann, was bei der Darstellung von g noch einen Zwischenschritt erfordert.



h) Individuelle Ergebnisse

K2/5 **14 a)** $f_{a,b}(x) = ba^x = be^{x \ln a} \Rightarrow f'_{a,b}(x) = b \cdot \ln a \cdot e^{x \ln a} = b \cdot \ln a \cdot a^x$

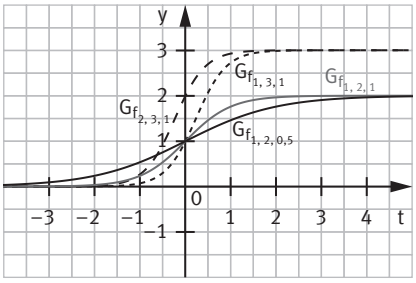
b) $f_{a,b}(0) = 3 \Leftrightarrow b = 3$; $f'_{a,3}(0) = 6 \Leftrightarrow 3 \cdot \ln a \cdot a^0 = 6 \Rightarrow a = e^2$



K2/5 **15 a)** $f'(t) = 10e^{2t}$ $\quad 2f(t) = 2 \cdot 5e^{2t} = f'(t)$

b) Die Wachstumsrate zu einem Zeitpunkt t entspricht dem doppelten des Werts des Bestands zum Zeitpunkt t. Die Wachstumsrate ist proportional zum Bestand.

c) Graph für a = 1; S = 2; k = 1



Mögliche Beispiele:
Pflanzenwachstum, Population einer Spezies

a	Anfangsbestand	$f(0) = \frac{aS}{a + (S - a)} = a$
S	beschreibt die langfristige Wachstumsgrenze („Sättigungsgrenze“)	$\lim\limits_{t \to +\infty} f_{a,S,k}(t) = \frac{aS}{a} = S$
k	beschreibt die Wachstumsgeschwindigkeit	$f'_{a,S,k}(t) = -\frac{aS \cdot [(S - a) \cdot e^{-kSt} \cdot (-kS)]}{(a + (S - a)\, e^{-kSt})^2} = \frac{aS^2k(S - a)\, e^{-Skt}}{(a + (S - a)\, e^{-kSt})^2}$ $f'_{a,S,k}(0) = ak \cdot (S - a)$

d) $k \cdot f_{a,S,k}(t) \cdot \left[S - f_{a,S,k}(t)\right] = \frac{aSk}{a + (S-a)e^{-Skt}} \cdot \left[S - \frac{aS}{a + (S-a)e^{-Skt}}\right]$

$= \frac{aSk}{a + (S-a)e^{-Skt}} \cdot \frac{aS + S(S-a)e^{-Skt} - aS}{a + (S-a)e^{-Skt}}$

$= \frac{aSk \cdot S(S-a)e^{-Skt}}{(a + (S-a)e^{-Skt})^2} = \frac{aS^2k(S-a)e^{-Skt}}{(a + (S-a)e^{-kSt})^2} = f'_{a,S,k}(t)$

Anfänglich gilt näherungsweise $f'_{a,S,k}(t) \sim f_{a,S,k}(t)$: Die Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional zum Bestand, d. h. das Wachstum verhält sich nahezu wie exponentielles Wachstum.

Mit zunehmendem Bestand gilt näherungsweise $f'_{a,S,k}(t) \sim S - f_{a,S,k}(t)$, d. h. das Wachstum verläuft beschränkt mit der Sättigungsgrenze S.

K2/5

16 a) Die Pflanze ist zu Beginn 1,5 cm groß.

b) $h(5) = 22 + 1{,}5 = 23{,}5 \Leftrightarrow 0{,}015 \cdot 3^{5k} = 0{,}235 \Rightarrow k = \frac{\ln\frac{47}{3}}{5\ln 3} \approx 0{,}5$

$h(t) = 0{,}015 \cdot 3^{0{,}5t}$; $h(8) = 0{,}015 \cdot 3^{0{,}5 \cdot 8} \approx 1{,}215$

c) Mögliche Gründe: Es sind nicht genügend Sonne oder Nährstoffe für ausreichendes Wachstum vorhanden.

d) $h_2(5) = 0{,}235 \Leftrightarrow a + b \cdot 3^{2,5} = 0{,}235$; (I)

$h_2(8) = 1{,}08 \Leftrightarrow a + b \cdot 3^4 = 1{,}08$ (II)

(II) – (I): $b \cdot (3^4 - 3^{2,5}) = 0{,}845 \Rightarrow b = \frac{0{,}845}{3^4 - 3^{2,5}} \approx 0{,}013$

In (I): $a \approx 0{,}235 - 0{,}013 \cdot 3^{2,5} \approx 0{,}032$

e) Die Gesamtfunktion ist wegen $h(5) = h_2(5) = 0{,}235$ stetig.

Es gilt: $h(t) = 0{,}015 \cdot e^{0{,}5t \cdot \ln 3}$; $h'(t) = 0{,}0075 \cdot \ln 3 \cdot e^{0{,}5t \cdot \ln 3}$; $h'(5) = 0{,}0075 \cdot \ln 3 \cdot e^{2{,}5 \cdot \ln 3}$

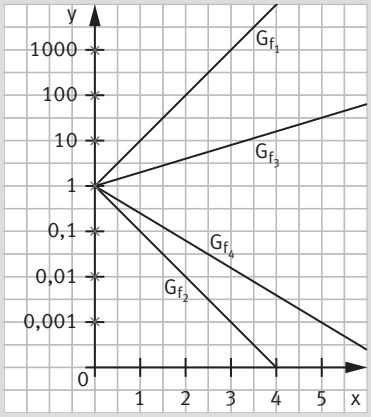
$h_2(t) = a + b \cdot e^{0{,}5t \cdot \ln 3}$; $h_2'(t) = b \cdot \ln 3 \cdot e^{0{,}5t \cdot \ln 3}$

Die Gesamtfunktion ist wegen $h'(5) \approx 0{,}12844$ und $h_2'(5) \approx 0{,}1106$ nicht differenzierbar.

Vertiefung

K4/6

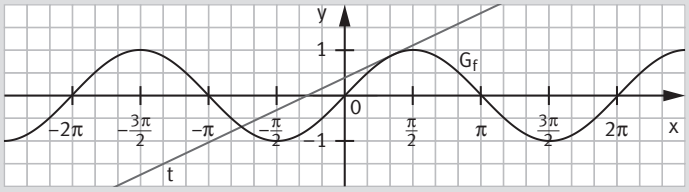
Logarithmische Skalen

- Die Geschichte der Erde wird hier dargestellt als Zeitstrahl von rechts (4,5 Mrd. Jahre) bis links (heute). Jedoch sind die Jahresabstände nicht gleich groß.
  Es handelt sich um eine logarithmische Skala: Die Abstände zwischen benachbarten Zehnerpotenzen sind jeweils gleich groß.
- 

- Da $e^x \neq 0$ gilt, kann eine logarithmische Skala nicht bei null beginnen.
- Individuelle Ergebnisse

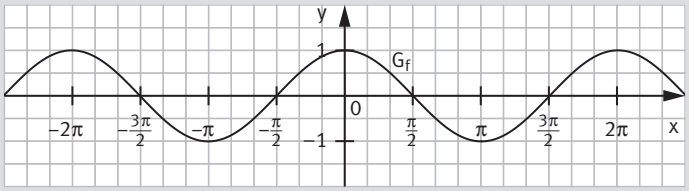
Entdecken

K4



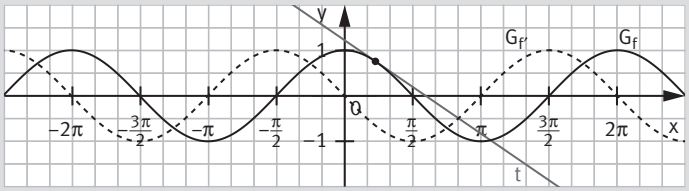
K4/5

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	...
Tangentensteigung	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	



K6 ■ Vermutung: Es handelt sich um den Graphen der Kosinusfunktion.

K2/4 ■ Vermutung: Die Ableitungsfunktion der Kosinusfunktion ist die negative Sinusfunktion.



Nachgefragt

K1/5 ■ Die vierte Ableitung der Sinusfunktion ist wiederum die Sinusfunktion. Da 2024 durch 4 teilbar ist, ist die 2024-te Ableitung der Sinusfunktion ebenfalls die Sinusfunktion.

K1/6 ■ Die Ableitung der Kosinusfunktion ist die negative Sinusfunktion. Diese besitzt wegen ihrer Periodizität unendlich viele Nullstellen.

Aufgaben

K5/6 **1** **a)** $f'(x) = -\sin(x-3)$ Kettenregel, Potenz- und Summenregel

b) $f'(x) = 2x\cos(x^2)$ Kettenregel und Potenzregel

c) $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$ Produktregel

d) $f'(x) = -2\cos x \cdot \sin x$ Potenzregel und Kettenregel

e) $f'(x) = -a\sin(ax+b)$ Kettenregel und Summenregel

f) $f(x) = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$; $f'(x) = 0$ Konstantenregel

g) $f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ Potenz- und Summenregel

h) $f'(x) = 2[1-\sin(2x)] \cdot (-\cos(2x)) \cdot 2 = -4\cos(2x) \cdot [1-\sin(2x)]$

Potenzregel, Kettenregel und Summenregel

K5 **2** **a)** $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$; $F'(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x) \cdot 2 = f(x)$

b) $F(x) = \pi \sin\frac{x}{\pi}$; $F'(x) = \cos\frac{x}{\pi} = f(x)$

c) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \sin x$; $F'(x) = 3x + \cos x = f(x)$

d) $F(x) = -\frac{40}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$; $F'(x) = 10\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = f(x)$

e) $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \cos(-x)$; $F'(x) = 2x^2 + \sin(-x) = f(x)$

f) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\sin 3x \Rightarrow F'(x) = e^{3x} - \cos 3x = f(x)$

K4/5 **3** 1

a) $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}\pi$; $x_2 = -\frac{1}{2}\pi$; $x_3 = \frac{1}{2}\pi$; $x_4 = \frac{3}{2}\pi$

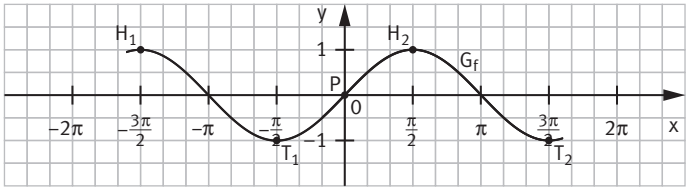
$f''\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$; $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 > 0$;

$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$;

G_f hat die Hochpunkte $H_1\left(-\frac{3}{2}\pi \mid 1\right)$ und $H_2\left(\frac{1}{2}\pi \mid 1\right)$ sowie die Tiefpunkte $T_1\left(-\frac{1}{2}\pi \mid -1\right)$ und $T_2\left(\frac{3}{2}\pi \mid -1\right)$.

b) $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$; $f(0) = 0$; $P(0 \mid 0)$

c)



2

a) $f'(x) = -2\sin(2x)$; $f''(x) = -4\cos(2x)$

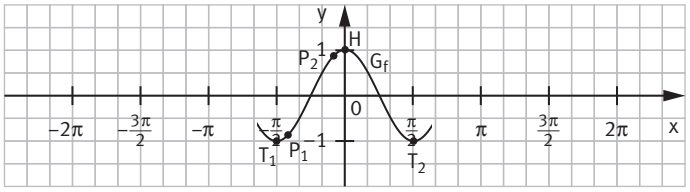
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}\pi$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{1}{2}\pi$;

$f''(0) = -4 < 0$; $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0$; $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; $f(0) = 1$

G_f hat den Hochpunkt $H(0 \mid 1)$ sowie die Tiefpunkte $T_1\left(-\frac{1}{2}\pi \mid -1\right)$ und $T_2\left(\frac{\pi}{2} \mid -1\right)$.

b) $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{5\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{\pi}{12}$; $P_1\left(-\frac{5\pi}{12} \mid -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $P_2\left(-\frac{\pi}{12} \mid \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

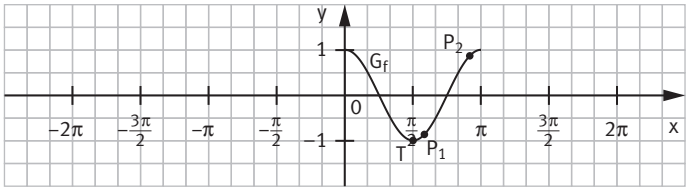
c)



3 Wegen $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2x)$, der Periodizität der Funktionen mit $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ sowie unter Beachtung der Definitionsmenge ergeben sich die Lösungen aus denen von 2:

$T\left(\frac{\pi}{2} \mid -1\right)$

$P_1\left(\frac{7\pi}{12} \mid -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $P_2\left(\frac{11\pi}{12} \mid \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$



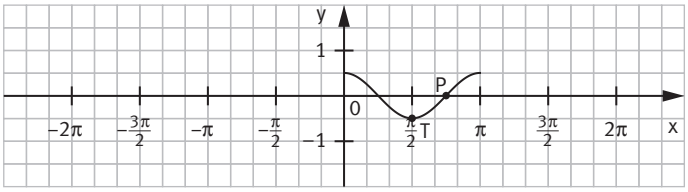
4

a) $f'(x) = -\sin(2x)$; $f''(x) = -2\cos(2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\pi$; $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}5$

b) $f'(x) = -\sin(2x) = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi$; $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$; $P\left(\frac{3}{4}\pi \mid 0\right)$

c)



K5 **4** **a)** $m = 1$: $P(0 \mid 0)$

$m = -1$: $Q_1(-\pi \mid 0)$; $Q_2(\pi \mid 0)$

b) $m = 0$: $R_1\left(-\frac{3}{2}\pi \mid 1\right)$; $R_2\left(-\frac{1}{2}\pi \mid -1\right)$; $R_3\left(\frac{1}{2}\pi \mid 1\right)$; $R_4\left(\frac{3}{2}\pi \mid -1\right)$

c) $m = 0{,}5$: $S_1\left(-\frac{5}{3}\pi \mid -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$; $S_2\left(\frac{1}{3}\pi \mid \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$; $S_3\left(\frac{1}{3}\pi \mid \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$; $S_4\left(\frac{5}{3}\pi \mid -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

K1/5 **5** **a)** 1 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

2 Mit 1 erhält man: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \sin x$.

b) Mit 1 und 2 aus Teilaufgabe a) erhält man:

$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$.

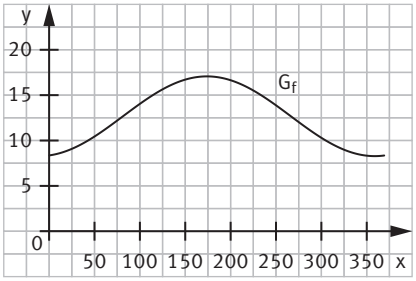
K4/5 **6** 1 – C Mögliche Funktionsterme: $f(x) = 0{,}5\sin(2x)$; $f'(x) = \cos(2x)$

2 – A Mögliche Funktionsterme: $f(x) = \cos(0{,}5(x - 0{,}5\pi))$; $f'(x) = -0{,}5\sin(0{,}5(x - 0{,}5\pi))$

3 – B Mögliche Funktionsterme: $f(x) = -1{,}5\sin x$; $f'(x) = -1{,}5\cos x$

K3/4 **7** **a)** Periodenlänge: $p = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{365}} = 365$ [Tage]. Das ist die Länge eines Jahres, nach der sich die Tageslängen wiederholen.

b)



c) $f'(x) = \frac{2\pi}{365} \cdot 4{,}4\cos\left(\frac{2\pi}{365}(x - 81)\right)$; $f''(x) = -\left(\frac{2\pi}{365}\right)^2 \cdot 4{,}4\sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 81)\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{365}(x - 81)\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{365}(x - 81) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{365}{4} + 81 = 172{,}25$; $x_2 = x_1 + \frac{365}{2} = 354{,}75$

$f''(172{,}25) = -\left(\frac{2\pi}{365}\right)^2 \cdot 4{,}4 < 0$; $f(172{,}25) = 16{,}6$

$f''(354{,}75) = \left(\frac{2\pi}{365}\right)^2 \cdot 4{,}4 > 0$; $f(354{,}75) = 7{,}8$

Größte Tageslänge am 22. Juni

Kleinste Tageslänge am 22. Dezember

d) Es gilt:

21. März: $f(79) \approx 12{,}049$

23. September: $f(265) \approx 12{,}086$

21. Juni: $f(171) \approx 16{,}599$

21. Dezember: $f(354) \approx 7{,}800$

K3/6 **8** **a)** G_{B_1}: blauer Graph; G_{B_2}: roter Graph

Periodenlänge: $p_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$; $p_2 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} < p_1$

b) Mögliche Lösungen:

Ruhezustand:	besonders starke Zunahme:	$t_1 = 1$ [s]; $t_2 = 2$ [s]
	besonders starke Abnahme:	$t_1 = 0{,}5$ [s]; $t_2 = 1{,}5$ [s]
Trainingsbelastung:	besonders starke Zunahme:	$t_1 = 0{,}5$ [s]; $t_2 = 1$ [s]
	besonders starke Abnahme:	$t_1 = 0{,}25$ [s]; $t_2 = 0{,}75$ [s]

c) Individuelle Ergebnisse

K5 **9** $F'(x) = 1 + (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 1 - (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = (\cos x)^2 + (\cos x)^2 = 2 \cdot (\cos x)^2 = f(x)$

K1/5 **10** $f'_{a,k}(x) = -ak \sin(kx)$; $f''_{a,k}(x) = -ak^2 \cos(kx)$

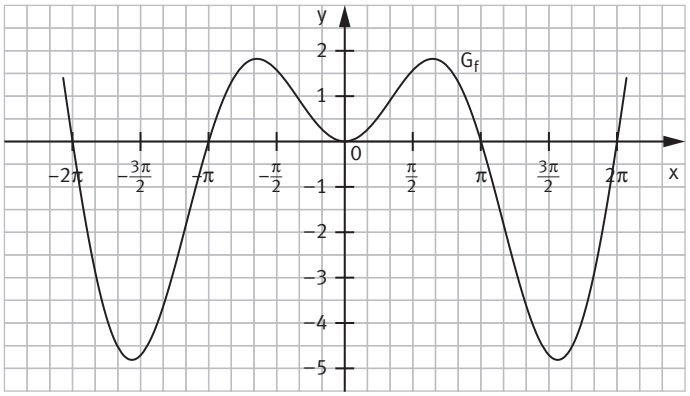
$f''_{a,k}(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = \frac{\pi}{2k} + n \cdot \frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbb{Z}$, sind Nullstellen von f″ mit VZW und daher Wendestellen von f.

$f(x_n) = a \cdot \cos\left(k\left(\frac{\pi}{2k} + n \cdot \frac{2\pi}{k}\right)\right) = a \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi + 2n\pi\right) = 0$, d. h. alle Wendestellen sind Nullstellen von f.

K1/5 **11** **a)** $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x = f(x)$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \sin x = 0 \Rightarrow x_1 = -2\pi$; $x_2 = -\pi$; $x_3 = 0$; $x_4 = \pi$; $x_5 = 2\pi$;

$N_1(-2\pi\,|\,0)$; $N_2(-\pi\,|\,0)$; $N_3(0\,|\,0)$; $N_4(\pi\,|\,0)$; $N_5(2\pi\,|\,0)$



c) Aus den Ergebnissen von Teilaufgabe b) folgt $P = N_2$ und $Q = N_4$.

Wegen der Symmetrie von G_f sind die Innenwinkel bei P und Q sind gleich groß.

Winkel bei Q: $f'(x) = \sin x + x \cos x$; $f'(\pi) = -\pi$

Größe des Steigungswinkels der Tangenten: $\tan\varphi = -\pi \Rightarrow \varphi \approx -72{,}34°$

Größe des Innenwinkels des Dreiecks bei P bzw. Q: $\alpha = -\varphi \approx 72{,}34°$

Größe des Innenwinkels bei S: $\gamma = 180° - 2\alpha \approx 35{,}32°$

Punkt $S(0\,|\,y_S)$: $y_S = x_Q \cdot \tan\alpha = \pi^2$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A_{PQS} = \frac{1}{2} \cdot x_Q \cdot y_S = \frac{\pi^2}{2}$ [FE]

K3/6 **12 a)** Die Temperatur nimmt im Laufe jedes Tages zu bis zu einem Höchstwert und nimmt dann, besonders in der Nacht ab. Insgesamt nimmt die Höchsttemperatur über die Woche zu.

b) Mögliche Lösung:

$f(t) = -8{,}5 \sin\left(\frac{2\pi}{24}\left(t + 3\right)\right) + 18{,}5$ mit t: Zeit in Stunden ab Montag um 0 Uhr; f(t): Temperatur in °C

Die Periodenlänge beträgt 24 [Stunden].

Die mittlere Tagestemperatur liegt bei etwa $\frac{10 + 27}{2} = 18{,}5$ [°C].

Die geringste Tagestemperatur wird nicht um Mitternacht, sondern erst etwas später erreicht.

Es wird jedoch außer Acht gelassen, dass die Höchsttemperatur über die Woche zunimmt.

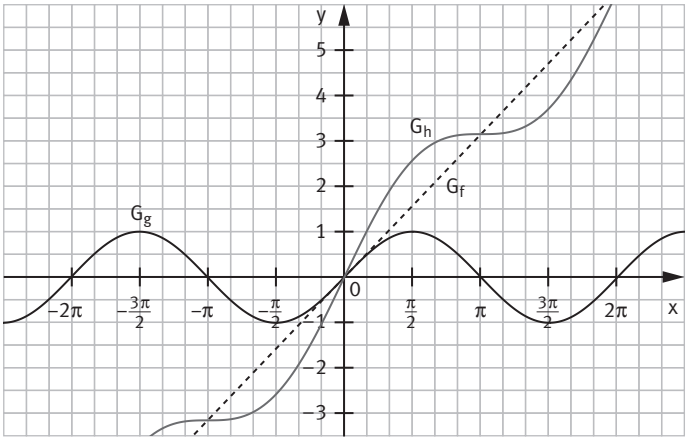
c) $f'(t) = -8{,}5 \cdot \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi}{12}(t + 3)\right)$; $f''(t) = 8{,}5 \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\left(t + 3\right)\right)$

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}\left(t + 3\right)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{12}\left(t + 3\right) = \pi \Rightarrow t = 9$ ist Nullstelle von f″ mit VZW und

$f'(9) = 8{,}5 \cdot \frac{\pi}{12} > 0$

Den stärksten Temperaturanstieg liefert das Modell für 9 Uhr, das stärkste Fallen daher für 21 Uhr.

K4/5 **13 a)**



b) $f(0) = g(0) = 0$ (I)

$f'(x) = 1$; $g'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = g'(0) = 1$ (II)

Aus (I) und (II) folgt, dass sich die Graphen im Ursprung berühren.

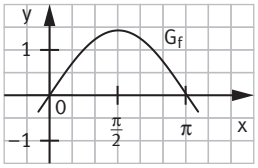
c) Man bestimmt aus $\tan \varphi_f = 1$ zunächst die Größe $\varphi_f = 45°$ des Winkels zwischen G_f und der x-Achse. Dann bestimmt man aus $\tan \varphi_h = f'(0) + g'(0) = 2$ die Größe $\varphi_h \approx 63{,}43°$ des Winkels zwischen G_h und der x-Achse. Die Größe des Winkels φ ergibt sich dann als Differenz $\varphi_h - \varphi_f$.

$\varphi = \varphi_h - \varphi_f \approx 63{,}43° - 45° = 18{,}43° < 20°$

K2/5 **14 a)** Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \sqrt{2} \cdot \sin 0 = 0$; $S_y(0|0)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $N_1(0|0)$; $N_2(\pi|0)$

b) $f'(x) = \sqrt{2} \cdot \cos x$; $f''(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin x$



Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$; $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2} < 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$

G_f hat einen Tiefpunkt $T\left(\frac{\pi}{2} \middle| \sqrt{2}\right)$.

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \cdot \sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$ sind jeweils Nullstellen mit VZW von f″ und damit Wendestellen von f: $W_1(0|0) = N_1$; $W_2(\pi|0) = N_2$

c) Gemeinsame Punkte: $A = N_1$ und $B = N_2$

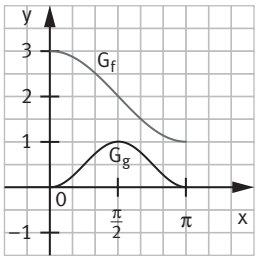
$f'(0) = \sqrt{2}$; $f'(\pi) = -\sqrt{2}$

Parabel: $g(x) = \frac{4}{\pi^2} x(x - \pi) = \frac{4}{\pi^2}(x^2 - \pi x)$; $g'(x) = \frac{4}{\pi^2}(2x - \pi)$

$g'(0) = -\frac{4}{\pi} \neq f'(0)$; $g'(\pi) = \frac{4}{\pi} \neq f'(\pi)$ Die Graphen berühren sich in den Punkten A und B nicht.

d) $F'(x) = -a \sin x$; $F'(x) = f(x) \Rightarrow a = -\sqrt{2}$ und $F(0) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \cos 0 + b = 0 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

K2/5 **15 a)**



b) $F'(x) = 2 + \cos x = f(x)$; $G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + \frac{1}{2}$

$G'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)] = \frac{1}{2}\left[1 - (\cos x)^2 + (\sin x)^2\right] = \frac{1}{2} \cdot 2(\sin x)^2 = (\sin x)^2 = g(x)$

c) 1 Da G_f im Intervall $[0; \pi]$ oberhalb von G_g liegt, berechnet sich der Abstand zwischen zwei Punkten mit derselben x-Koordinate a durch die Differenz $f(a) - g(a)$.

2 $d(a) = f(a) - g(a) = 2 + \cos a - (\sin a)^2$

$d'(a) = -\sin a - 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = -\sin a \cdot (1 + 2\cos a)$

$d'(a) = 0 \Leftrightarrow \sin a = 0$ oder $1 + 2\cos a = 0$

1. Fall: $\sin a = 0 \Rightarrow a_1 = 0$; $a_2 = \pi$; $d(0) = 3$; $d(\pi) = 1$

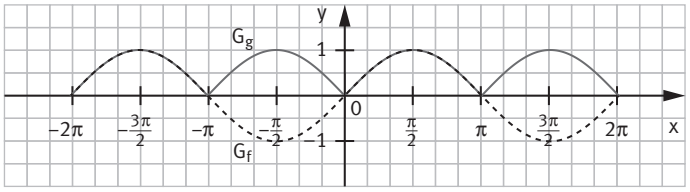
2. Fall: $1 + 2\cos a = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{3}\pi$; $d\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{4}$

Die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ ist für $a^* = \frac{2}{3}\pi$ minimal.

3 $f'(x) = -\sin x$; $g'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$

$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $g'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Die Tangenten in P an G_f bzw. in Q an G_g haben die gleiche Steigung und sind somit parallel.

K5/6 **16 a)**



b) An der Stelle $x_0 = 0$ ist die Funktion g nicht differenzierbar, da der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmen, d. h. die Steigung von rechts nicht der Steigung von links entspricht.

Weitere Stellen: $x_1 = -\pi$; $x_2 = \pi$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} g'(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = 1$

Die „Halbtangenten“ schließen jeweils mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein. Daher schließen sie miteinander einen Winkel der Größe 90° ein.

K2/5 **17 a)** $f_2(x) = 1 + \sin(2x)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_2(0) = 1$; $S_y(0 \mid 1)$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \sin(2x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow N_1\left(-\frac{\pi}{4} \mid 0\right)$; $N_2\left(\frac{3\pi}{4} \mid 0\right)$

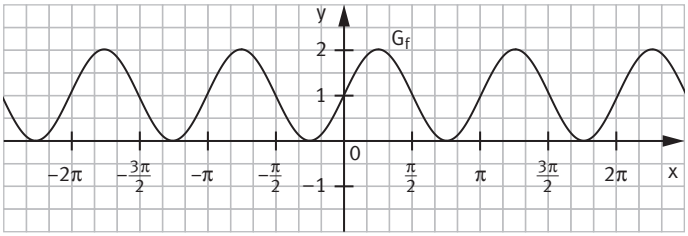
Extrempunkte: $f'(x) = 2\cos(2x)$; $f''(x) = -4\sin(2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3\pi}{4}$; $x_2 = -\frac{\pi}{4}$; $x_3 = \frac{\pi}{4}$; $x_4 = \frac{3\pi}{4}$

$f''\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 < 0$; $f''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 > 0$;

$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$

G_f hat die Hochpunkte $H_1\left(-\frac{3\pi}{4} \mid 2\right)$ und $H_2\left(\frac{\pi}{4} \mid 2\right)$ sowie die Tiefpunkte $T_1\left(-\frac{\pi}{4} \mid 0\right) = N_2$ und $T_2\left(\frac{3\pi}{4} \mid 0\right) = N_4$.



b) Tangentensteigungen: $f_k'(x) = k \cdot \cos(kx)$

$f_k'(0) = k$; $f_k'\left(\frac{\pi}{k}\right) = k \cdot \cos(\pi) = -k$

$f_k'(0) \cdot f_k'\left(\frac{\pi}{k}\right) = -1 \Leftrightarrow k \cdot (-k) = -1 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k_{1/2} = \pm 1$

K5/6 **18** Das mit den Koordinatenachsen eingeschlossene Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn die Tangentensteigung 1 oder –1 beträgt. Man bestimmt daher diejenigen Punkte des Graphen, an dem seine Steigung 1 oder –1 ist.

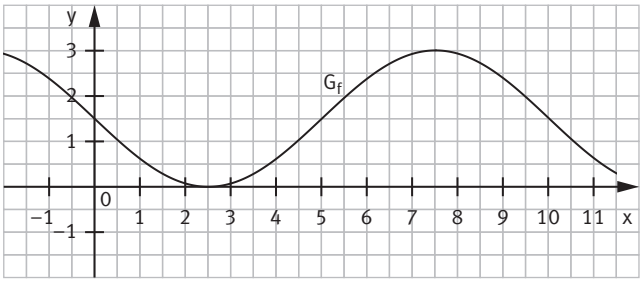
$f'(x) = \cos x$

1. Fall: $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f(2k\pi) = -2$

2. Fall: $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x_k = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f(\pi + 2k\pi) = -2$

Insgesamt: Berührpunkte: $B_k(k\pi\,|\,-2)$, $k \in \mathbb{Z}$

K2/4 **19 a)** $f(0) = 1{,}5$ [m]



b) $f'(t) = 0{,}3\pi \cos\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right)$; $f'(0) = -0{,}3\pi < 0$.

Dies bedeutet, dass zum Zeitpunkt t = 0 der Wasserstand abnimmt.

c) Graph 1 ist der Graph der Ableitung, da dieser der Einzige ist, der bei t = 0 unterhalb der x-Achse verläuft.

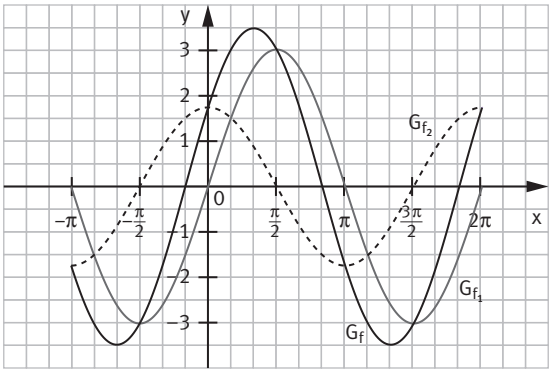
d) $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}3\pi \cos\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{5}(t-5) = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = 2{,}5$; $t_2 = 7{,}5$

$f''(t) = -\frac{3\pi^2}{50}\sin\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right)$; $f''(2{,}5) = \frac{30\pi^2}{50} > 0$; $f''(7{,}5) = -\frac{3\pi^2}{50} < 0$

$f(2{,}5) = 0$; $f(7{,}5) = 3$

Der Wasserstand erreicht zum Zeitpunkt $t_1 = 2{,}5$ [h] sein Minimum mit 0 m und zum Zeitpunkt $t_2 = 7{,}5$ [h] sein Maximum mit 3 m.

K4/5 **20 a)**



b) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 3\sin 0 + \sqrt{3}\cos 0 = \sqrt{3}$; $S_y(0|\sqrt{3})$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$; $x_3 = \frac{11\pi}{6}$; $N_1\left(-\frac{\pi}{6}\middle|0\right)$; $N_2\left(\frac{5\pi}{6}\middle|0\right)$; $N_3\left(\frac{11\pi}{6}\middle|0\right)$
Extrempunkte:
$f'(x) = 3\cos x - \sqrt{3}\sin x$; $f''(x) = -3\sin x - \sqrt{3}\cos x$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{2\pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{3}$; $x_3 = \frac{4\pi}{3}$
$f''\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = f''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0$; $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$; $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$
G_f hat die Hochpunkte $H_1\left(-\frac{4\pi}{3}\middle|2\sqrt{3}\right)$ und $H_2\left(\frac{2\pi}{3}\middle|2\sqrt{3}\right)$ sowie den Tiefpunkt $T\left(\frac{\pi}{3}\middle|-2\sqrt{3}\right)$.

c) $F'(x) = -3 \cdot (-\sin x) + \sqrt{3}\cos x = 3\sin x + \sqrt{3}\cos x = f(x)$
$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -3\cos x + \sqrt{3}\sin x = F(x)$
Verschiebt man den Graphen von f um $\frac{\pi}{2}$ LE in positive x-Richtung, so erhält man den Graphen der Stammfunktion F von f.

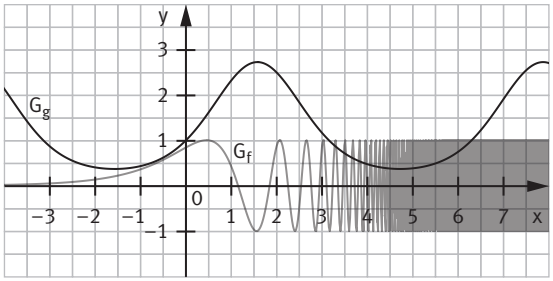
K2/6 **21** Da die natürliche Exponentialfunktion streng monoton zunehmend ist, nimmt die Funktion f ihren größten (kleinsten) Wert für den größten (kleinsten) Wert des Exponenten an.

a) Größter Wert für $\sin x = 1$: $e^{1+1} = e^2$
Kleinster Wert für $\sin x = -1$: $e^{-1+1} = e^0 = 1$

b) Größter Wert für $\cos x = 1$: $e^{2-1} = e$
Kleinster Wert für $\cos x = -1$: $e^{-2-1} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

c) Größter Wert für $\cos(x + 1) = -1$: $e^{-(-1)} = e$
Kleinster Wert für $\cos(x + 1) = 1$: $e^{-1} = \frac{1}{e}$

K1/2 **22 a)** $f(x) = \sin(e^x)$; $g(x) = e^{\sin x}$



b) 1 Die Gleichung $e^{\sin x} = 0$ hat keine Lösung, da stets $e^x > 0$ gilt.
Die Gleichung $\sin(e^x) = 0$ hat keine negativen Lösungen, da für $x < 0$ gilt $0 < e^x < 1$ und $\sin x \neq 0$ für $x \in]0; 1[$ gilt.

2 Für die Wertemenge der natürlichen Exponentialfunktion gilt $W =]0; +\infty[$, die insbesondere das Intervall $[2\pi; 4\pi]$ und damit eine volle Periode der Sinusfunktion enthält. Daher gilt für die Wertemenge von f $W_f = [-1; 1]$.
Die Wertemenge der in $\mathbb{R}$ definierten Sinusfunktion ist das Intervall $[-1; 1]$, damit gilt für die Wertemenge von g $W_g = [e^{-1}; e^1] = \left[\frac{1}{e}; e\right]$.

3 Für negative Werte von x gilt $0 < e^x < 1$. Die Sinusfunktion ist im Intervall $]0; 1[$ streng monoton steigend und besitzt daher keine Extremstellen.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x + 2\pi) = e^{\sin(x+2\pi)} = e^{\sin x} = g(x)$, d. h. die Funktion g ist periodisch mit Periodenlänge 2π.
Extremstellen: $g'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$; $g''(x) = -\sin x \cdot e^{\sin x} + (\cos x)^2 \cdot e^{\sin x}$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot e^{\sin x} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$; $g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \cdot e + 0 = -e < 0$; $g''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e > 0$;
$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$; $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}$
G_g hat die Hochpunkte $H_k\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\middle|e\right)$ und die Tiefpunkte $T_k\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\middle|\frac{1}{e}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

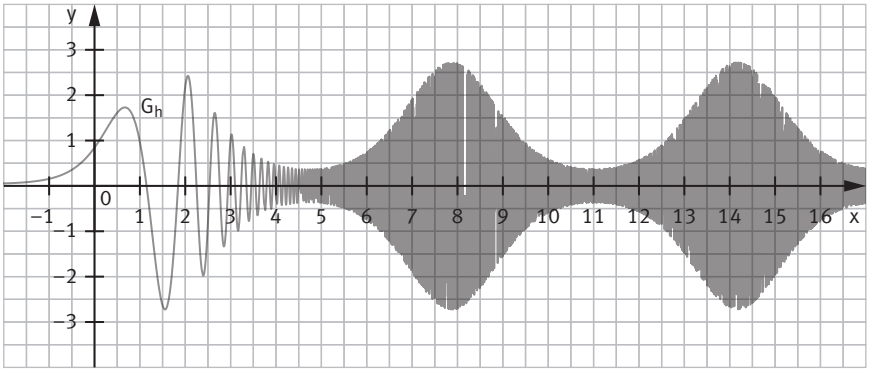
d) $f'(x) = e^x \cdot \cos e^x$; $f''(x) = e^x \cdot \cos e^x + e^x \cdot (-\sin e^x) \cdot e^x = e^x \cdot (\cos e^x - e^x \cdot \sin e^x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot \cos e^x = 0 \Rightarrow \cos e^x = 0 \Rightarrow e^{x_1} = \frac{1}{2}\pi$; $e^{x_2} = \frac{3}{2}\pi$

$\Rightarrow x_1 = \ln\frac{\pi}{2}$; $x_2 = \ln\frac{3\pi}{2}$; $f''\left(\ln\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} < 0$; $f''\left(\ln\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{9\pi^2}{4} > 0$; $f\left(\ln\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $f\left(\ln\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Die beiden am weitesten links liegenden Extrempunkte von G_f sind $H\left(\ln\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$ und $T\left(\ln\frac{3\pi}{2}\middle|-1\right)$.

e)



$h'(x) = e^{\sin x}(e^x \cos e^x + \sin e^x \cdot \cos x)$;

$h''(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}(e^x \cos e^x + \sin e^x \cdot \cos x) + e^{\sin x}[e^x \cdot \cos e^x + e^x \cdot (-\sin e^x) \cdot e^x + e^x \cdot \sin e^x \cdot \cos x + \sin e^x \cdot (-\sin x)]$

Es gilt $h'(-3{,}1) = 0{,}000396\ldots > 0$ und $h'(-3{,}15) = -0{,}000024\ldots > 0$

Im Intervall $[-3{,}15; -3{,}1]$ gilt $h''(x) > 0$, die Funktion h' ist im Intervall $[-3{,}15; -3{,}1]$ streng monoton zunehmend und hat daher dort genau eine Nullstelle mit VZW. Die Funktion h hat daher im Intervall $[-3{,}15; -3{,}1]$ eine Extremstelle.

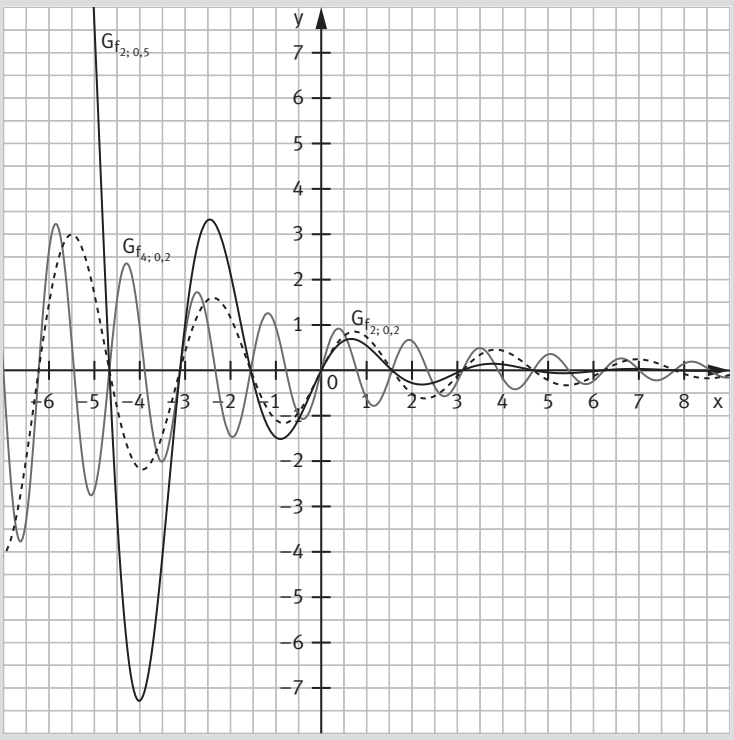
Physik

K2/4

Mathematische Beschreibung von Schwingungen

- Mögliche Beispiele: Fadenpendel, Federpendel, elektrischer Schwingkreis
- $s'(t) = A\omega\cos(\omega t)$; $s''(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t)$;

  $s''(t) = -\omega^2 s(t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
- Je größer der Wert von k ist, desto schneller nimmt die Amplitude ab. Der Parameter k beschreibt die Dämpfung der Schwingung.
  Je größer der Wert von ω ist, desto kleiner ist die Periodenlänge der Funktion. Der Parameter ω hängt umgekehrt proportional mit der Periodenlänge der Schwingung zusammen. Es gilt $p = \frac{2\pi}{\omega}$.



K1/5 **1** Der Funktionsterm $f_{-1}(x) = x^3 + x$ besitzt nur ungerade Exponenten. Daher ist $G_{f_{-1}}$ punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

K5 **2** **a)** Der Funktionsterm $f_a(x) = -x^3 + ax$ besitzt nur ungerade Exponenten. Daher ist G_{f_a} punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

b) $f_a'(x) = -3x^2 + a$;
$f_a'(1) = 0 \Leftrightarrow -3 + a = 0 \Rightarrow a = 3$

c) $f_a''(x) = -6x$; $f_a''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ist einfache Nullstelle von f_a; $f_a(0) = 0$
Der Punkt (0|0) ist Wendepunkt des Graphen aller Funktionen f_a.

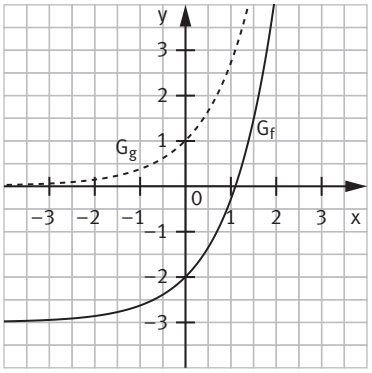
K1/4 **3** **a)** Die Aussage ist wahr, da der Graph der von f' an der Stelle $x = -3$ eine Nullstelle mit VZW von negativen zu positiven Werten hat.

b) Die Aussage ist wahr, da im Intervall $[-2; -1]$ $f'(x) > 0$ gilt, der Graph von f in diesem Intervall also streng monoton steigend ist.

K5 **4** **a)** $F_c(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$;
$F(1) = 7{,}5 \Leftrightarrow 2{,}5 + c = 7{,}5 \Rightarrow c = 5$;
$F(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5$

b) $F_c(x) = -x^4 - x + c$;
$F(0) = 1 \Leftrightarrow 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$;
$F(x) = -x^4 - x + 1$

K4/5 **5** **a)** Verschiebung um 3 LE in negative y-Richtung



$f_k'(x) = 3x^2 + 2(1 + k)x - k$; $f_k''(x) = 6x + 2 + 2k$;
$f_k''(2) = 0 \Leftrightarrow 12 + 2 + 2k = 0 \Rightarrow k = -7$

a) $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + ax = 0 \Leftrightarrow x(a - x^2) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{a}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{a}$

b) $f_a'(x) = -3x^2 + a = 0$; $f_a''(x) = -6x$
$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + a = 0$
$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3a}$; $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3a}$;
$f_a''\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3a}\right) = 2\sqrt{3a} > 0$;
$f_a''\left(\frac{1}{3}\sqrt{3a}\right) = -2\sqrt{3a} < 0$;
$f_a\left(\frac{1}{3}\sqrt{3a}\right) = -\frac{a}{9}\sqrt{3a} + \frac{a}{3}\sqrt{3a} = \frac{2a}{9}\sqrt{3a}$;
$f_a\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3a}\right) = +\frac{a}{9}\sqrt{3a} - \frac{a}{3}\sqrt{3a} = -\frac{2a}{9}\sqrt{3a}$
G_{f_a} hat den Hochpunkt $H_a\left(\frac{1}{3}\sqrt{3a}\,\middle|\,\frac{2a}{9}\sqrt{3a}\right)$
und den Tiefpunkt $T_a\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3a}\,\middle|\,-\frac{2a}{9}\sqrt{3a}\right)$.

c) $g\left(\frac{1}{3}\sqrt{3a}\right) = 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3a} = \frac{2a}{9}\sqrt{3a} = y_{H_a}$

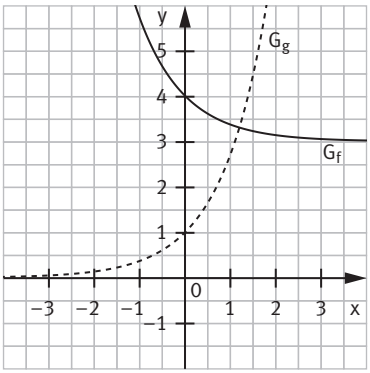
a) Die Aussage ist wahr, da die Ableitungsfunktion wegen der (mindestens) drei Nullstellen (mindestens) eine Funktion 3. Grades ist.

b) Die Aussage ist falsch, da $f''(-2) = 0$ und $f'(-2) = 2$ gilt. Damit gilt $f''(-2) + f'(-2) = 2 > 1$.

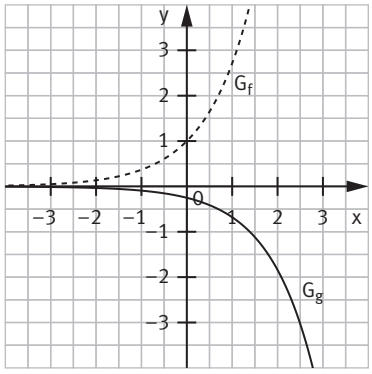
a) $F_c(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{3}\,x + c$;
$F(\sqrt{3}) = 7{,}5 \Leftrightarrow \frac{15}{2} + c = 7{,}5 \Rightarrow c = 0$;
$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{3}\,x$

b) $F_c(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + c$;
$F(1{,}5) = 4 \Leftrightarrow 7{,}2 + c = 4 \Rightarrow c = -3{,}2$;
$F(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3{,}2$

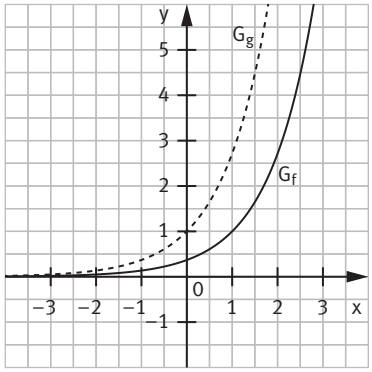
a) Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 3 LE in positive y-Richtung



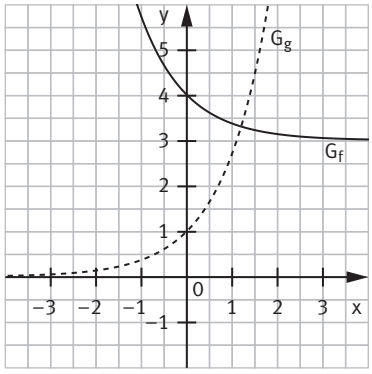
b) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ und Spiegelung an der x-Achse



c) Verschiebung um 1 LE in positive x-Richtung

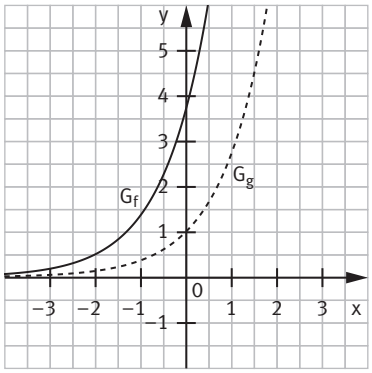


d) Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 3 LE in positive y-Richtung

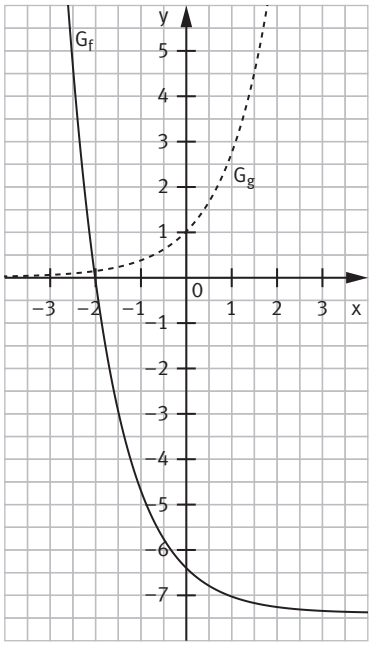


b) $f(x) = \frac{1}{2}e^2 \cdot e^x$

Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}e^2$

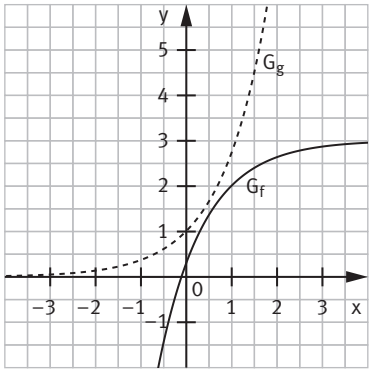


c) Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um e^2 LE in negative y-Richtung



d) $f(x) = 3 - e^{-(x-1)}$

Spiegelung an der y-Achse
Verschiebung um 1 LE in positive x-Richtung
Spiegelung an der x-Achse,
Verschiebung um 3 LE in positive y-Richtung



K3/5 **6** **a)** $h(-3) - h(2{,}5) = -\frac{9}{100} + \frac{1}{50}e^{-3} + 2 - \left(\frac{2{,}5^2}{100} + \frac{1}{50}e^{2{,}5} + 2\right) \approx 0{,}27$
Die Straße überwindet in diesem Bereich einen Höhenunterschied von rund 270 m.

b) $h'(x) = \frac{1}{50}(e^x - x)$;
$\tan\alpha = h'(1) \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{50}(e - 1) \Rightarrow \alpha \approx 1{,}97°$

a) $h'(x) = \frac{1}{50}(e^x - x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit insbesondere im Intervall $[-3; 2{,}5]$, da der Graph der natürlichen Exponentialfunktion stets oberhalb der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten verläuft.
Der Graph von h ist im Intervall $[-3; 2{,}5]$ streng monoton wachsend, die Straße gewinnt an Höhe.

b) $h''(x) = \frac{1}{50}(e^x - 1)$
$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{50}(e^x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ist Nullstelle von h″ mit VZW von negativen zu positiven Werten und damit die Stelle eines lokalen Tiefpunkts von h′.
$h'(0) = \frac{1}{50}(e^0 - 0) = \frac{1}{50}$
Die Straße hat eine minimale Steigung von $\frac{1}{50} = 2\,\%$.

K5/6 **7** **a)** $f'(x) = 1 + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = 1 + e^x + x \cdot e^x$

b) $f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x + \frac{1}{4}e^x = e^x\left(3x^2 + x^3 + \frac{1}{4}\right)$

Beim Ableiten wird jeweils die Summen-, Potenz- und Produktregel verwendet.

Der Parameter a wird als reelle Konstante behandelt.

a) $f_a'(x) = a + 2xe^x + x^2e^x$

b) $f_a'(x) = (2x + a) \cdot e^x + (x^2 + ax) \cdot e^x$
$= e^x(x^2 + (2 + a)x + a)$

Beim Ableiten wird jeweils die Summen-, Potenz- und Produktregel verwendet.

K5 **8** **a)** $f'(x) = 2e^{2x-4}$; $f'(2) = 2e^0 = 2$; $f(2) = e^0 = 1$
$1 = 2 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -3$
t_P: $y = 2x - 3$

b) $f'(x) = -0{,}5e^{1-0{,}5x}$; $f'(2) = -0{,}5e^0 = -0{,}5$;
$f(2) = e^0 = 1$
$1 = (-0{,}5) \cdot 2 + t \Rightarrow t = 2$
t_P: $y = -0{,}5x + 2$

c) $f'(x) = 2xe^{x^2-1}$; $f'(-1) = -2e^0 = -2$;
$f(-1) = e^0 = 1$
$1 = (-2) \cdot (-1) + t \Rightarrow t = -1$
t_P: $y = -2x - 1$

a) $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e}$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e}e^1 = 2$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^1}{e} = 1$
$1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + t \Rightarrow t = 0$
t_P: $y = 2x$

b) $f'(x) = 2(x + e^x)(1 + e^x)$; $f'(0) = 2 \cdot e^0 \cdot 2 = 4$;
$f(0) = (e^0)^2 = 1$
$1 = 4 \cdot 0 + t \Rightarrow t = 1$
t_P: $y = 4x + 1$

c) $f'(x) = 1 \cdot e^{x^2-1} + x \cdot e^{x^2-1} \cdot 2x = e^{x^2-1}(2x^2 + 1)$;
$f'(-1) = 3$; $f(-1) = -1$
$-1 = 3 \cdot (-1) + t \Rightarrow t = 2$
t_P: $y = 3x + 2$

K1/4 **9** Es gilt $g'(x) = e^{f(x)} > 0$. Somit hat G_g keine Stellen mit waagrechter Tangente und damit auch keine Extremstellen.

$g''(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$;
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$, da $f'(3) = 0$ gilt.

K5 **10** **a)** $\ln(e^{2x+1}) + \ln(e^{-x}) = 2x + 1 - x = x + 1$

b) $e^{\ln(a)+3} + \ln(e^{-3}) = e^{\ln(a)} \cdot e^3 - 3 = ae^3 - 3$

a) $\ln(2x^2) + \ln(e^{-2x}) - \ln x = \ln\left(\frac{2x^2}{x}\right) - 2x$
$= \ln(2x) - 2x$

b) $\ln(x + 3)^2 - \ln(x^2) - \ln(e^3)$
$= 2\ln(x + 3) - 2\ln x - 3 = 2\ln\left(\frac{x+3}{x}\right) - 3$

K5 **11** **a)** $e^{2x-1} = 4 \Rightarrow 2x - 1 = \ln 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 + \ln 4)$;
$L = \left\{\frac{1}{2}(1 + \ln 4)\right\}$

b) $e^x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$; $L = \{-2; 2\}$

K5 **12** $f'(x) = 4 - 2e^{2x}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(2 - e^{2x}) = 0$
$\Rightarrow 2x = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2$

K3/5 **13** Das Bakterienwachstum lässt sich modellhaft mit der Funktion f mit $f(t) = 1000 \cdot 2^{\frac{t}{36}}$ beschreiben (t: Zeit in Stunden).

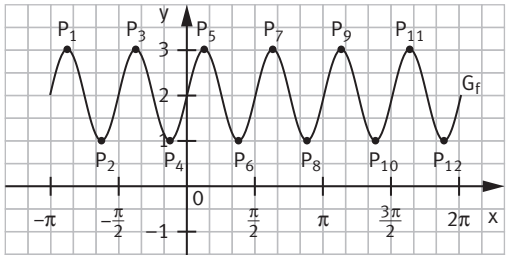
1 Eine Woche hat $7 \cdot 24 = 168$ Stunden;
$f(168) = 1000 \cdot 2^{\frac{168}{36}} \approx 25\,398{,}4$

2 $f(t) = 10\,000 \Leftrightarrow 1000 \cdot 2^{\frac{t}{36}} = 10\,000$
$\Rightarrow 2^{\frac{t}{36}} = 10 \Rightarrow t = \frac{36 \ln 10}{\ln 2} \approx 119{,}6$ [Stunden]

K1/5 **14** **a)** $f'(x) = 1 \cdot \sin(2x) + 2x\cos(2x)$
$= \sin(2x) + 2x\cos(2x)$

b) $f'(x) = 2(x + 3\cos x)(1 - 3\sin x)$

K4/5 **15** **a)** $f'(x) = 4\cos(4x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(4x) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -\frac{7\pi}{8}$; $x_2 = -\frac{5\pi}{8}$; $x_3 = -\frac{3\pi}{8}$; $x_4 = -\frac{\pi}{8}$;
$x_5 = \frac{\pi}{8}$; $x_6 = \frac{3\pi}{8}$; $x_7 = \frac{5\pi}{8}$; $x_8 = \frac{7\pi}{8}$; $x_9 = \frac{9\pi}{8}$;
$x_{10} = \frac{11\pi}{8}$; $x_{11} = \frac{13\pi}{8}$; $x_{12} = \frac{15\pi}{8}$
$P_1\left(-\frac{7\pi}{8}\middle|3\right)$; $P_2\left(-\frac{5\pi}{8}\middle|1\right)$; $P_3\left(-\frac{3\pi}{8}\middle|3\right)$;
$P_4\left(-\frac{\pi}{8}\middle|1\right)$; $P_5\left(\frac{\pi}{8}\middle|3\right)$; $P_6\left(\frac{3\pi}{8}\middle|1\right)$; $P_7\left(\frac{5\pi}{8}\middle|3\right)$;
$P_8\left(\frac{7\pi}{8}\middle|1\right)$; $P_9\left(\frac{9\pi}{8}\middle|1\right)$; $P_{10}\left(\frac{11\pi}{8}\middle|3\right)$;
$P_{11}\left(\frac{13\pi}{8}\middle|1\right)$; $P_{12}\left(\frac{15\pi}{8}\middle|3\right)$



a) $e^{x^2-9} = 1 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$;
$L = \{-3; 3\}$

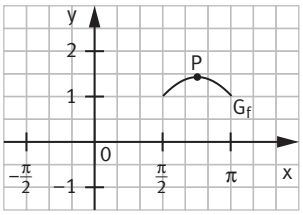
b) $(e^{2x^2+5} + 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow e^{2x^2+5} + 3 = 0$ oder $x = 3$
$e^{2x^2+5} + 3 = 0$ hat keine Lösung; $L = \{3\}$

$f'(x) = 2x + e^{-x}$; $f''(x) = 2 - e^{-x}$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-x} = 0 \Rightarrow -x = \ln 2 \Rightarrow x = -\ln 2$

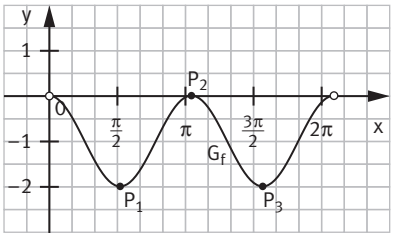
Nach 9 Tagen (216 Stunden) sind
$f(216) = 1000 \cdot 2^{\frac{216}{36}} = 64\,000$ Bakterien vorhanden.
Funktion für Abnahme:
$g(t) = 64\,000 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{24}}$ $(t \geq 216)$
$g(t) = 1000 \Leftrightarrow 64\,000 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{24}} = 1000$
$\Rightarrow 2^{\frac{t}{24}} = 64 \Rightarrow 2^{\frac{t}{24}} = 2^6 \Rightarrow t = 24 \cdot 6 = 144$
Es dauert 6 Tage (144 Stunden), bis die Bakterien wieder ihre ursprüngliche Anzahl haben.

Der Graph von f ist der Sinuskurve ähnlich, allerdings nimmt der y-Wert der Hochpunkte mit wachsendem x-Wert ab. Derjenige Hochpunkt mit dem größten y-Wert ist daher der mit dem kleinsten (positiven) x-Wert.
$f'(x) = -e^{-x} \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \cos x = e^{-x} \cdot (\cos x - \sin x)$
$f''(x) = e^{-x} \cdot \sin x - e^{-x} \cdot \cos x - e^{-x} \cdot \cos x$
$+ e^{-x} \cdot (-\sin x) = -2e^{-x} \cdot \cos x$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \cdot (\cos x - \sin x) = 0$
$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}$; $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cdot e^{-0{,}25\pi} < 0$;
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{-0{,}25\pi}$
Der Hochpunkt von G_f mit dem größten y-Wert ist $H\left(\frac{\pi}{4}\middle|\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{-0{,}25\pi}\right)$.

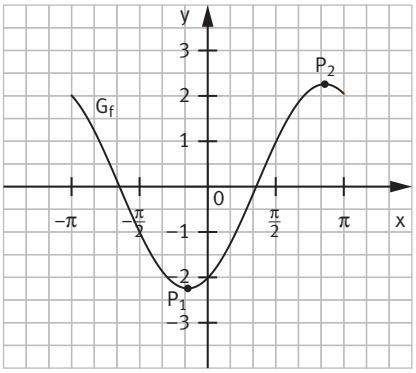
a) $f'(x) = \cos x + \sin x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x$
$\Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow P\left(\frac{3\pi}{4}\middle|\sqrt{2}\right)$



b) $f'(x) = -2\sin(2x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(2x) = 0$
$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \pi$; $x_3 = \frac{3\pi}{2}$
$P_1\left(\frac{\pi}{2}\middle|-2\right)$; $P_2(\pi|0)$; $P_3\left(\frac{3\pi}{2}\middle|-2\right)$



b) $f'(x) = \cos x + 2\sin x$; $f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos x + 2\sin x = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow x_1 \approx -0{,}46$; $x_2 \approx 2{,}68$; $P_1(-0{,}46|-2{,}24)$;
$P_2(2{,}68|2{,}24)$



K5 **16** $f'(x) = ax(x + 2) = ax^2 + 2ax$

$f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + ax^2 + b$

$f(0) = 0 \Rightarrow b = 0$; $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + ax^2$

$f(-3) = -9a + 9a = 0$ unabhängig von a

Alle Graphen der Funktionenschar haben den Punkt P (–3 | 0) gemeinsam.

K1/4 **17** Graph II ist der Graph einer Stammfunktion F. Da Graph II an zwei Stellen die x-Achse (mit VZW) schneidet, müsste eine zugehörige Stammfunktion (im dargestellten Bereich) zwei Extremstellen besitzen. Dies ist aber bei keinem der gezeichneten Graphen der Fall.

Graph III ist der Graph der Funktion f, da die Funktion F an der Stelle $x_0 = -3$ einen Tiefpunkt besitzt und nur Graph III an der Stelle $x_0 = -3$ die x-Achse schneidet.

Graph I stellt demnach die Ableitungsfunktion f' dar.

K1/4 **18** **a)** Die Aussage ist wahr, da $F(1) = 0$ und $f(1) = F'(1) = 0$ gilt.

b) Die Aussage ist wahr, da der Graph von F im Intervall [–1; 1] sein Krümmungsverhalten ändert und daher einen Wendepunkt hat.

c) Die Aussage ist falsch, da $F(-2) = 0$ und $f(0) < 0$ gilt, da der Graph von F in einer Umgebung von $x_0 = 0$ streng monoton fallend ist.

K4/5 **19** G_{f_a} – 2, da dies der einzige Graph mit einer senkrechten Asymptote ist. Die Gerade mit der Gleichung $x = -1$ ist senkrechte Asymptote, daher gilt $a = 1$.

G_{g_b} – 3, da dies der einzige verbleibende Graph mit einer waagrechten Asymptote ist.

Aus $g_b(0) = -2 + b$ folgt $b = 2$.

G_{h_c} – 4, da bei Graph 1 im Ursprung ein Wendepunkt des Graphen ist.

Der Graph von h_c ist eine Parabel, die keinen Wendepunkt besitzt.

K3/5 **20** **a)** $f_1(t) = e^3 \Leftrightarrow e^{0,1t} = e^3 \Rightarrow t = 30$ [Stunden]

$f_2(30) = 900e^{-30a}$; $f_2(30) = e^3 \Leftrightarrow 900\,e^{-30a} = e^3 \Rightarrow a = -\frac{1}{30}\ln\frac{e^3}{900} \approx 0{,}13$

b) Wegen $a < 1$ gilt: $\lim\limits_{t \to +\infty} f_2(t) = 0$. Die Kultur stirbt daher aus.

K1/5 **21** **a)** Nullstellen: $g(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 2)e^{2x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Ableitungen: $g'(x) = 8xe^{2x}$; $g''(x) = 8e^{2x} + 8x \cdot e^{2x} \cdot 2 = 8e^{2x}(1 + 2x)$

Extremstellen: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 8xe^{2x} = 0 \Rightarrow x = 0$; $g''(0) = 8 > 0$; $g(0) = -2$

G_g hat einen Tiefpunkt T (0 | –2).

Wendepunkte: $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 8e^{2x}(1 + 2x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ist Nullstelle mit VZW von g'' und damit Wendestelle von g; $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{e}$.

G_g hat einen Wendepunkt $W\left(-\frac{1}{2}\middle|-\frac{4}{e}\right)$.

Wendetangente: $g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{e}$

$-\frac{4}{e} = -\frac{4}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + t \Rightarrow t = -\frac{6}{e}$

t_W: $y = -\frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$

b) 1 $g(x) = (2 \cdot 2x - 2) \cdot e^{2 \cdot x} = f_2(x)$ und $h(x) = ((-2) \cdot 2x - 2) \cdot e^{(-2) \cdot x} = f_{-2}(x)$

2 $f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = \left[2a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) - 2\right] \cdot e^{a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = -4e^{-1} = \frac{4}{e}$ unabhängig von a.

Es gilt $p(x) = \frac{4}{e}$.

3 Das mit den Koordinatenachsen eingeschlossene Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn ihre Steigung 1 oder –1 beträgt. Man berechnet die Steigung im Wendepunkt und bestimmt a, so dass $f_a'\left(-\frac{1}{a}\right) = \pm 1$ gilt.

K2/4 **22 a)** f ist überall definiert, wenn $b \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ ist.

b) $f_{a,b}(x) = 0 \Leftrightarrow a + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -a$. Diese Gleichung ist lösbar für $a \in [-1; 1]$

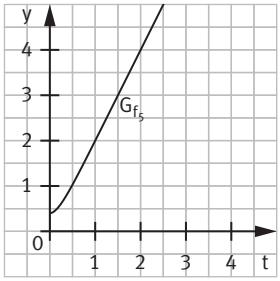
c) 1 Der Graph besitzt die Polstellen $x_k = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, d. h. es gilt $b + \cos(x_k) = 0 \Rightarrow b = 1$.
Der Graph besitzt die Nullstellen $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$, d. h. es gilt $a + \sin(x_n) = 0 \Rightarrow a = -1$.
Es gilt $a = -1$ und $b = 1$, $f_{-1,1}(x) = \frac{-1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

2 Der Graph besitzt die Polstellen $x_k = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, d. h. es gilt $b + \cos(x_k) = 0 \Rightarrow b = -1$.
Der Graph besitzt keine Nullstellen, d. h. es gilt $a \notin [-1; 1]$. Wegen $f(x) > 0$ gilt $a = -2$.
Es gilt $a = -2$ und $b = -1$, $f_{-2,-1}(x) = \frac{-2 + \sin x}{-1 + \cos x}$.

3 Der Graph besitzt die Nullstellen $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$, d. h. es gilt $a + \sin(x_n) = 0 \Rightarrow a = 1$.
Der Graph besitzt keine Polstellen, d. h. es gilt $b \notin [-1; 1]$. Wegen $f(x) \leq 0$ gilt $b = 2$.
Es gilt $a = 1$ und $b = 2$, $f_{1,2}(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$.

4 Der Graph besitzt keine Polstellen, d. h. es gilt $b \notin [-1; 1]$.
Der Graph besitzt keine Nullstellen, d. h. es gilt $a \notin [-1; 1]$.
Wegen $f(x) \geq 0$ und $f(0) = \frac{2}{3}$ gilt $a = 2$ und $b = 2$.
Es gilt $a = 2$ und $b = 2$, $f_{2,2}(x) = \frac{2 + \sin x}{2 + \cos x}$.

K2/3 **23 a)** Für $a = 5$



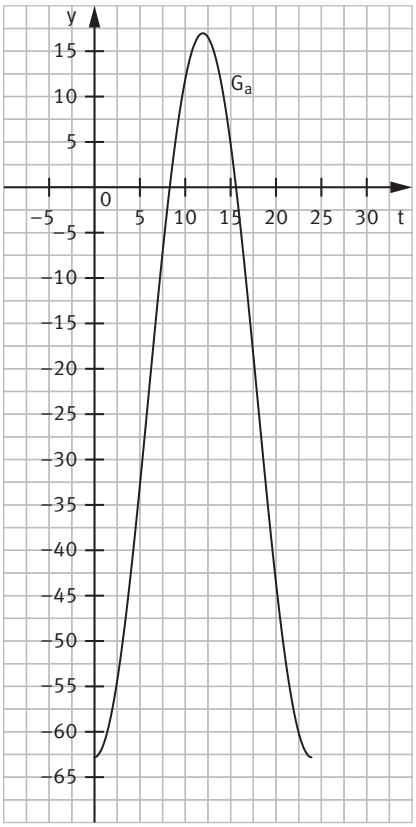
b) a beschreibt, wie stark der Körper von der Flüssigkeit abgebremst wird.

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} (e^{-at}) = 0$; für $t \to +\infty$ gilt $s_a(t) = \frac{10}{a^2}(at + e^{-at}) \approx \frac{10}{a^2} at = \frac{10}{a} t$

d) $v_a(t) = s_a'(t) = \frac{10}{a^2}(a - ae^{-at})$; $\lim\limits_{t \to +\infty} (ae^{-at}) = 0$; für $t \to +\infty$ gilt $v_a(t) = \frac{10}{a}$
Die Geschwindigkeit wird für lange Sinkzeiten nahezu konstant.

e) Für lange Sinkzeiten gilt $s_a(t) = \frac{10}{a} t = v_a(t) \cdot t$, d. h. es liegt eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vor. Der zurückgelegte Weg ist zur (konstanten) Geschwindigkeit proportional.

K2/6 **24 a)**



b) Damit die Funktion einen Tag modellieren kann, muss sie periodisch mit der Periode p = 24 sein. Der Faktor $\frac{\pi}{12}$ ergibt sich aus $\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.

c) $\alpha(t) = 0 \Leftrightarrow -40 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) - 23 = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -\frac{23}{40} \Rightarrow t_1 \approx 8{,}34$ (Sonnenaufgang);
$t_2 = 24 - t_1 \approx 15{,}66$ (Sonnenuntergang)

d) Man bestimmt mithilfe des Graphen denjenigen Wert t_3 ($t_3 < 12$) mit $f(t_3) = -6$.
Die Differenz $t_1 - t_3$ ist dann die Länge der bürgerlichen Abenddämmerung.

e) Die Nacht dauert am Nordpol am 21. Dezember 24 Stunden, da die Funktion $\alpha_{Nordpol}$ mit $\alpha_{Nordpol}(t) = -19 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - 23$ keine Nullstellen besitzt. Es gilt $\alpha_{max} = -19 \cdot (-1) - 23 = -4$.
D. h. es gibt aber Zeiten, in denen der Höhenwinkel der Sonne Werte zwischen –6° und –4° annimmt, so dass es eine bürgerliche Abenddämmerung gibt.

K5 **1** **a)** Ableitungen: $f_a'(x) = 2ax$; $f_a''(x) = 2a$

Extremstelle: $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax = 0 \Rightarrow x_0 = 0$;

Hinreichende Bedingung: $f_a''(0) = 2a \begin{cases} < 0 \text{ für } a < 0 \\ > 0 \text{ für } a > 0 \end{cases}$

Der Graph G_{f_a} besitzt für $a < 0$ einen Hochpunkt $H_a\left(0 \middle| \frac{1}{a}\right)$ und für $a > 0$ einen Tiefpunkt $T_a\left(0 \middle| \frac{1}{a}\right)$.

b) Stammfunktion: $F_{a,c}(x) = a \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{a}x + c$, $c \in \mathbb{R}$

Da die Wendestelle von $F_{a,c}$ genau die Extremstelle von f ist, gilt $F_{a,c}(0) = 0$, d. h. $c = 0$.

Also: $F_{a,0}(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{a}x$

K1/2 **2** Es gilt $G_A = G_f$ und $G_B = G_F$.

Begründung: G_B kann nicht der Graph von f sein, da z. B. in der Umgebung von $x_0 = -3$ der Graph G_A sehr flach verläuft, seine Ableitung müsste also kleine (positive) Werte besitzen.

Allerdings gilt ungefähr $B(-3) \approx 2$. Somit folgt die Behauptung.

K5/6 **3** **a)** Mit $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)+d}$ gilt:

Verschiebung um 2 Längeneinheiten in positive x-Richtung

Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3; Spiegelung an der x-Achse

b) Mit $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)+d}$ gilt:

Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$; Spiegelung an der y-Achse

Verschiebung um 4 Längeneinheiten in negative y-Richtung

K5 **4** **a)** $f(1) = (1-1) \cdot e^1 = 0$; $P(1|0)$

Ableitung: $f'(x) = (-1) \cdot e^x + (1-x) \cdot e^x = e^x \cdot (-1+1-x) = -x \cdot e^x$

$f'(1) = -1 \cdot e^1 = -e = m_{t_P}$

Tangente: t_P: $y = mx + t \Rightarrow 0 = -e \cdot 1 + t \Rightarrow t = e$

Tangentengleichung t_P: $y = -ex + e$

b) $f(1) = 1^2 \cdot e^1 = e$; $P(1|e)$

Ableitung: $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x$

$f'(1) = (2 \cdot 1 + 1^2) \cdot e^1 = 3e = m_{t_P}$

Tangente: t_P: $y = mx + t \Rightarrow e = 3e \cdot 1 + t \Rightarrow t = -2e$

Tangentengleichung: t_P: $y = 3e \cdot x - 2e$

K1 **5**

1	A	$F'(x) = 2(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x} \cdot (-1)) = 2(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x}) = 2((e^x)^2 - (e^{-x})^2) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$
2	D	$F'(x) = 1 + e^{-x} \cdot (-1) = 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x}$
3	B	$F'(x) = e^{x+2} \cdot 1 = e^x \cdot e^2 = e^2 \cdot e^x$
4	C	$F'(x) = 3x^2 + \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \cdot 3 = 3x^2 + e^{3x}$

K5 **6** **a)** $\ln(\underbrace{\ln e}_{1}) = \ln 1 = 0$

b) $[\ln(e^2)]^2 + 2\underbrace{\ln e}_{1} = [2\underbrace{\ln e}_{1}]^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$

c) $\ln(e^2) + \ln\frac{1}{e^2} - e^{\ln 2} = 2\underbrace{\ln e}_{1} + \ln e^{-2} - 2 = 2 - 2\underbrace{\ln e}_{1} - 2 = -2$

d) $\ln\frac{1}{3} - \ln e^3 - \ln 3 = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 3 - 3\underbrace{\ln e}_{1} - \ln 3 = -2\ln 3 - 3$

K5 **7** **a)** **Symmetrie:** $f(-x) = (-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x)$;

G_f ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0 \cdot e^{-0^2} = 0$; $S_y(0|0)$

Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$; $N(0|0) = S_y$

Verhalten für $x \to +\infty$: Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{-x^2}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = 0$, da die e-Funktion schneller wächst als jede Potenzfunktion.

b) **Ableitungen:**

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2}$;

$f''(x) = (-4x) \cdot e^{-x^2} + (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = (-6x + 4x^3) \cdot e^{-x^2} = 2x \cdot (2x^2 - 3)\, e^{-x^2}$

Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2x^2) \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Hinreichende Bedingung:

$f''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} - 3) \cdot e^{-0,5} = -2\sqrt{2} \cdot e^{-0,5} < 0$

$\Rightarrow$ G_f hat an der Stelle $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ einen Hochpunkt $H\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \middle| \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^{-0,5}\right)$. Wegen der Punktsymmetrie von G_f bezüglich des Koordinatenursprungs ist dann $T\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \middle| -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^{-0,5}\right)$ der Tiefpunkt von G_f.

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2x^2 - 3) \underbrace{e^{-x^2}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$

sind jeweils einfache Nullstellen von f'' und damit Wendestellen von G_f.

$f\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot e^{-\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot e^{-\frac{3}{2}}$

Aufgrund der Punktsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs folgt $f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot e^{-\frac{3}{2}}$.

$W_1(0|0)$, $W_2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6} \middle| -\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$ und $W_3\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} \middle| \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$ sind Wendepunkte.

K3/6 **8** **a)** $f(t) = a \cdot e^{kt}$ mit t: Zeit in Stunden seit Beobachtungsbeginn; f(t): Menge des Jod 133 in mg

$f(0) = 10 \Rightarrow a \cdot e^{k \cdot 0} = 10 \Rightarrow a = 10$

$f(20,8) = 5 \Leftrightarrow 10 \cdot e^{k \cdot 20,8} = 5 \Leftrightarrow e^{k \cdot 20,8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \cdot 20,8 = \ln\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow k \cdot 20,8 = -\ln 2 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{20,8} \approx -0,033$

Also: $f(t) = 10 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{20,8} t}$

b) $f(t) < \frac{10\text{ mg}}{1000} = 0,01\text{ mg} \Rightarrow 10\text{ mg} \cdot e^{-0,033\,t} < 0,01\text{ mg}$

$e^{-0,033\,t} < \frac{0,01\text{ mg}}{10\text{ mg}} = 0,001 \Leftrightarrow -0,033t < \ln 0,001 = -\ln 1000$

$\Rightarrow t > \frac{\ln 1000}{0,033} \approx 209\,[\text{h}] \approx 8$ Tage 17 h

K3/5 **9** **a)** **Ableitungen:**

$f'(t) = -(2t + 20)\, e^{-0,1t} - (t^2 + 20t + 200)\, e^{-0,1t} \cdot (-0,1)$

$= -e^{-0,1t} \cdot (2t + 20 - 0,1t^2 - 2t - 20) = 0,1t^2 e^{-0,1t}$

$f''(t) = 0,1 \cdot 2t \cdot e^{-0,1t} + 0,1t^2 e^{-0,1t} \cdot (-0,1) = 0,1t \cdot (-0,1t + 2)\, e^{-0,1t}$

Wendestelle:

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow 0,1t \cdot (-0,1t + 2) \cdot \underbrace{e^{-0,1t}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow t_1 = 0$; $-0,1t + 2 = 0 \Rightarrow t_2 = 20\,[\text{Tage}]$

$f'(0) = 0$ kein Wachstum

$f'(20) = 0,1 \cdot 20^2 \cdot e^{-0,1 \cdot 20} = 40\, e^{-2} \approx 5,41 > 0$

Nach 20 Tagen hat die Pflanze den größten Wachstumsschub.

b) Gesucht ist das Verhalten der Funktion f für große Werte von t.
Es gilt $\lim\limits_{t \to +\infty} [-(t^2 + 20t + 200) \cdot e^{-0{,}1t} + 200] = 200$, da gilt $\lim\limits_{t \to +\infty} (t^n \cdot e^{-0{,}1t}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Die Pflanze kann höchstens 200 cm, also 2 m hoch werden.

K5 **10 a)** Zunächst bildet man die Ableitung der Funktion f: $f'(x) = 3(-\sin x) = -3 \sin x$.
Dann bestimmt man die y-Koordinate von P: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 3\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} = 2$; $P\left(\frac{\pi}{2}\middle|2\right)$.

Des Weiteren bestimmt man die Steigung der Tangente: $m_{t_P} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -3$.
In die allgemeine Geradengleichung setzt man die Koordinaten von P sowie die Steigung ein:
t_P: $y = mx + t \Rightarrow 2 = -3 \cdot \frac{\pi}{2} + t$.
Durch Auflösen der Gleichung erhält man $t = 2 + \frac{3\pi}{2}$ und notiert die Tangentengleichung:
t_P: $y = -3x + 2 + \frac{3}{2}\pi$.

b) $W_f = [-1; 5]$

K2/6 **11** Da die Exponentialfunktion streng monoton zunehmend ist, wird der kleinste (größte) Wert angenommen, wenn der Exponent am kleinsten (größten) ist.

a) Der kleinste Wert, den die Kosinusfunktion annehmen kann, ist –1, somit ist der kleinste Wert des Exponenten 0. Damit ist $e^0 = 1$ der kleinste Wert der Funktion.
Der größte Wert, den die Kosinusfunktion annehmen kann, ist 1, somit ist der größte Wert des Exponenten 2. Damit ist e^2 der größte Wert der Funktion.
Insgesamt gilt also: $W_f = [1; e^2]$

b) Der kleinste Wert, den die Sinusfunktion annehmen kann, ist –1, somit ist der kleinste Wert des Exponenten $2 \cdot (-1) - 1 = -3$. Damit ist e^{-3} der kleinste Wert der Funktion.
Der größte Wert, den die Sinusfunktion annehmen kann, ist 1, somit ist der größte Wert des Exponenten $2 \cdot 1 - 1 = 1$. Damit ist e der größte Wert der Funktion.
Insgesamt gilt also: $W_f = [e^{-3}; e]$

Aufgaben für Lernpartner

K1/6 **A** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f_a: x \mapsto ax^2$, $D_{f_a} = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$

Die zu verschiedenen Parameterwerten gehörenden Graphen sind nicht kongruent zueinander.

K1/6 **B** Die Aussage ist falsch, da $f_k(0) = 0^3 + k = k$, also hat jeder Graph G_{f_k} einen anderen Schnittpunkt $P_k(0\,|\,k)$ mit der y-Achse.

K1/6 **C** Die Aussage ist richtig. Da zu einer Stammfunktion beliebige Konstanten addiert werden können, lässt sich der Graph einer Stammfunktion so in y-Richtung verschieben, dass der verschobene Graph die x-Achse schneidet.

K1/6 **D** Die Aussage ist falsch, da für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.

K1/6 **E** Die Aussage ist richtig, da gilt: $\ln e^x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

K1/6 **F** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Der Funktionsterm von $f: x \mapsto e^{2x}$, $D_f = \mathbb{R}$, enthält eine Potenz zur Basis e. Aber es gilt: $f'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x} \neq f(x)$.

K1/6 **G** Die Aussage ist falsch, da e^a ein konstanter Summand ist. Richtig ist: $f_a'(x) = e^x$.

K1/6 **H** Die Aussage ist richtig, da e^a ein konstanter Faktor ist.

K1/6 **I** Beide Aussagen sind falsch. Richtig ist:
$k_1(x) = f(g(x)) = f(e^x - 1) = (e^x - 1)^2 + 1 = e^{2x} - 2e^x + 2$
$k_2(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = e^{x^2+1} - 1$

K1/6 **J** Die Aussage ist richtig. Es gilt für jede positive Basis b: $b = e^{\ln b}$ und damit $b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x \cdot \ln b}$.

K1/6 **K** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f: x \mapsto -e^x$, $D_f = \mathbb{R}$. Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty}(-e^x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = -\infty$.

K1/6 **L** Die Aussage ist falsch. Die Anzahl der Individuen zur Zeit $t = 0$ berechnet sich mit $f_a(0) = a \cdot e^{0+3} = a \cdot e^3 \neq a$.

K1/6 **M** Die Aussage ist falsch. Durch Logarithmieren erhält man: $\ln(x \cdot e^x) = \ln 4 \Rightarrow \ln(x) + x = \ln 4$, was mit Schulmathematik nicht gelöst werden kann.

K1/6 **N** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $e^x = e^2 \Rightarrow x = 2 \in \mathbb{Z}$

K1/6 **O** Die Aussage ist falsch. Richtig ist nach der Produktregel:
$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$.

K1/6 **P** Die Aussage ist falsch. Richtig ist: $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x = -f(x)$.

K1/4 **1**

1 Die Aussage ist richtig. Es gilt $F'(2) = f(2) = 0$, und das Vorzeichen von $F' = f$ wechselt an der Stelle $x_0 = 2$ von einem negativen Vorzeichen zu einem positiven.

2 Die Aussage ist richtig, da G_f im Intervall $[-2; 0]$ oberhalb der x-Achse liegt. Der Graph von F ist also streng monoton steigend im Intervall $[-2; 0]$, daher gilt die Behauptung.

3 Die Aussage ist falsch. Da G_f bei $x_0 = 1{,}5$ einen Tiefpunkt besitzt, gilt $f'(1{,}5) = 0$ und $f''(1{,}5) \geq 0$. Somit ist die Summe $f'(1{,}5) + f''(1{,}5)$ nicht negativ und damit insbesondere nicht kleiner als -1.

4 Die Aussage ist falsch, es sind zwei Nullstellen. G_f besitzt im Intervall $]-6; 2[$ zwei Wendestellen, bei $x_1 \approx -3$ und bei $x_2 \approx 0$. Da jede Wendestelle von f eine Nullstelle von f'' ist, besitzt f'' (mindestens) zwei Nullstellen im angegebenen Intervall.

5 Die Aussage ist falsch. G_F hat keine waagrechte Asymptote, da weder $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ noch $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ gilt. (Der Graph von f' hat die x-Achse als waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$, da sich G_f in diesem Bereich der Geraden $y = 1$ annähert.)

K2/5 **2**

a) Es gilt $f_a(x) = \frac{5}{3a^3} \cdot (x^2 - a^2)^2 = \frac{5}{3a^3} \cdot (x^4 - 2a^2x^2 + a^4)$.

Mögliche Eigenschaften:

- Jeder Graph G_{f_a} ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, da $f_a(x)$ unabhängig von a nur gerade Exponenten von x besitzt.
- Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = +\infty$, da $\frac{5}{3a^3} > 0$ unabhängig von $a \in \mathbb{R}^+$ gilt.
- Es gilt $W_{f_a} = [0; +\infty[$ unabhängig von a.
- Jeder Graph G_{f_a} besitzt unabhängig von $a \in \mathbb{R}^+$ zwei doppelte Nullstellen (deren Lage $\pm a$ allerdings von a abhängt).

b) **Ableitungen:** $f_a'(x) = \frac{5}{3a^3} \cdot (4x^3 - 4a^2x) = \frac{20}{3a^3} \cdot (x^3 - a^2x)$; $f_a''(x) = \frac{20}{3a^3} \cdot (3x^2 - a^2)$

Extremstellen: $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{20}{3a^3} \cdot (x^3 - a^2x) \Leftrightarrow \frac{20}{3a^3}x \cdot (x^2 - a^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2/3} = \pm a$

Hinreichende Bedingung:

$f_a''(0) = \frac{20}{3a^3} \cdot (3 \cdot 0^2 - a^2) = -\frac{20}{3a} < 0$ für $a > 0$; an der Stelle $x_1 = 0$ besitzt G_{f_a} einen Hochpunkt:

$f_a(0) = \frac{5}{3a^3} \cdot (0^2 - a^2)^2 = \frac{5}{3}a$; $H_a\left(0 \middle| \frac{5}{3}a\right)$

$f_a''(a) = \frac{20}{3a^3} \cdot (3a^2 - a^2) = \frac{40}{3a} > 0$ für $a > 0$; an der Stelle $x_2 = a$ besitzt G_{f_a} einen Tiefpunkt:

$f_a(a) = 0$; $T_{a,1}(a|0)$.

Wegen der Achsensymmetrie von G_{f_a} bezüglich der y-Achse gilt $T_{a,2}(-a|0)$.

Wendepunkte: $f_a''(x) = \frac{20}{3a^3} \cdot (3x^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{a}{3}\sqrt{3}$ sind jeweils einfache Nullstellen von f_a'' und damit Wendestellen von f_a.

$f_a\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{5}{3a^3} \cdot \left(\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 - a^2\right)^2 = \frac{5}{3a^3} \cdot \left(\frac{a^2}{3} - a^2\right)^2 = \frac{5}{3a^3} \cdot \left(-\frac{2a^2}{3}\right)^2 = \frac{20}{27}a$; $W_{a,1}\left(\frac{a}{3}\sqrt{3} \middle| \frac{20}{27}a\right)$

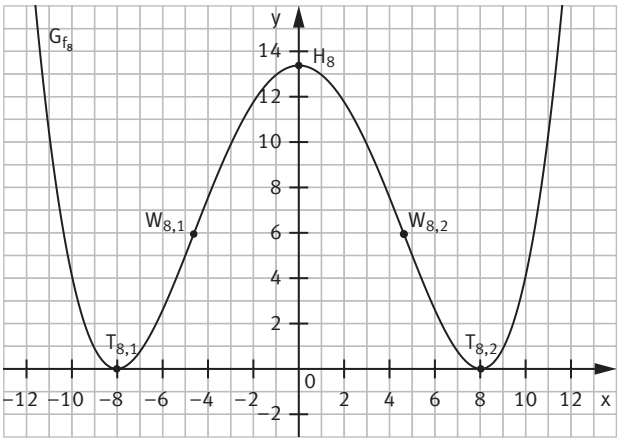
Wegen der Achsensymmetrie von G_{f_a} bezüglich der y-Achse gilt $W_{a,2}\left(-\frac{a}{3}\sqrt{3} \middle| -\frac{20}{27}a\right)$.

c) Steigung in den Wendepunkten:

$f_a'\left(x_{W_{a,1}}\right) = \frac{20}{3a^3} \cdot \left[\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^3 - a^2 \cdot \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)\right] = \frac{20}{3a^3} \cdot \left(\frac{a^3}{9}\sqrt{3} - \frac{a^3}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{20}{3a^3} \cdot \left(-\frac{2}{9}a^3\sqrt{3}\right) = -\frac{40}{9}\sqrt{3}$

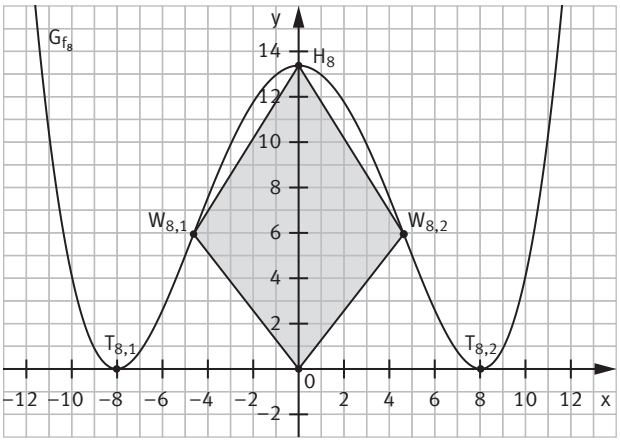
unabhängig von a. Wegen der Achsensymmetrie von G_{f_a} bezüglich der y-Achse ist auch die Steigung von G_{f_a} im zweiten Wendepunkt unabhängig von a und damit auch die Größe ihres Schnittwinkels.

d) Es gilt $f_8(x) = \frac{5}{1536} \cdot (x-8)^2 \cdot (x+8)^2$



e) Flächeninhalt: $A(a) = 2 \cdot \frac{1}{2} y_{H_a} \cdot x_{W_2} = \frac{5}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{5\sqrt{3}}{9}a^2$

Alle entsprechenden Vierecke sind achsensymmetrisch bezüglich der Diagonale OH_a.
Für ein Quadrat muss zusätzlich gelten, dass beide Diagonalen gleich lang sind.
Dies ist wegen $y_{H_a} = \frac{5}{3}a$ und $2 \cdot x_{W_{2,a}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$ aber für kein $a > 0$ erfüllt.
Somit gibt es kein Quadrat unter diesen Vierecken.



f) 1 $f^*(x) = -f_8(x) = -\frac{5}{1536} \cdot (x-8)^2 \cdot (x+8)^2$

2 $f^*(x) = f_8(-x) = \frac{5}{1536} \cdot (-x-8)^2 \cdot (-x+8)^2 = \frac{5}{1536} \cdot (x+8)^2 \cdot (x-8)^2 = f_8(x)$

3 $f_8(0) = \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3}$; $f^*(x) = f_8(x) - \frac{40}{3} = \frac{5}{1536} \cdot (x-8)^2 \cdot (x+8)^2 - \frac{40}{3}$

4 $f^*(x) = \frac{1}{2} \cdot f_8(x) = \frac{5}{3072} \cdot (x-8)^2 \cdot (x+8)^2$

K1/5 **3** **a)** Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x^2) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1$.

Die Gleichung $f(x) = 0$ hat genau zwei Lösungen, daher hat die Funktion f genau zwei Nullstellen.

b) Ableitung: $f'(x) = (-2x)e^{-x} + (1-x^2)e^{-x} \cdot (-1) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$

Extremstellen: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

Laut Aufgabenstellung sind dies die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte.

c) Die Stelle $x_0 = -1$ ist eine Nullstelle von f, an der das Vorzeichen von $f(x)$ von negativen Werten zu positiven Werten wechselt. Daher besitzt F an der Stelle $x_0 = -1$ einen Tiefpunkt. Da G_F durch den Punkt $T(-1|2)$ verläuft, ist dies ein Tiefpunkt von G_F.

d) 1 Nullstellen: $h_k(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - kx^2 = 0 \Leftrightarrow kx^2 = 1$

1. Fall: $k < 0$: Die Gleichung besitzt keine Lösung, die Funktion h_k besitzt keine Nullstelle.

2. Fall: $k = 0$: Die Funktion h_0 mit $h_0(x) = e^{-x}$ besitzt keine Nullstelle.

3. Fall: $k > 0$: $kx^2 = 1 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{k}}$. Die Funktion h_k besitzt genau zwei Nullstellen.

2 In diesem Fall gilt: $2 \cdot \sqrt{\frac{1}{k}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{k}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{k} = 4 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$.

3 Angenommen, es gibt einen Wert k, für den die Graphen G_f und G_k symmetrisch zueinander bezüglich der x-Achse liegen. Dann gilt: $h_k(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Damit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$(1 - kx^2)e^{-x} = -(1 - x^2)e^{-x} \Rightarrow 1 - kx^2 = -1 + x^2 \Rightarrow kx^2 = 2 - x^2 \Rightarrow (1 + k)x^2 = 2$

Diese Gleichung ist z. B. für $x = 0$ nicht erfüllt. Daher kann es keinen derartigen Wert für k geben.

K2/3 **4** **a)** Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 7e^{-0,2x}) = 1$, da $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,2x} = 0$ gilt.

Daher ist die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ waagrechte Asymptote von G_f.

Monotonie: Ableitung: $f'(x) = 7e^{-0,2x} \cdot (-0,2) = -1,4e^{-0,2x}$

Es gilt: $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$, also ist G_f streng monoton fallend.

b) $A(0) = \frac{8}{1 + 7e^{-0,2 \cdot 0}} = 1$: Zu Beobachtungsbeginn war die Fläche 1 m² groß.

$\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{1 + 7e^{-0,2x}} = 8$:

Der Flächeninhalt des Algenteppichs wird nach langer Zeit (nahezu) 8 m² groß sein.

Die Funktion f ist streng monoton abnehmend und positiv, daher ist A(x) streng monoton zunehmend.

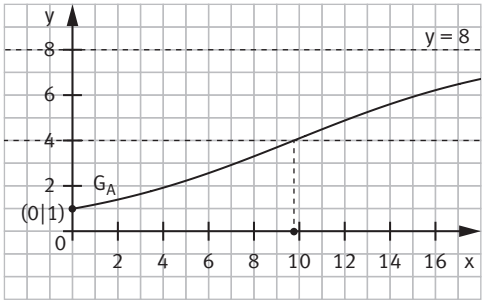
c) $A(x_0) = 4 \Leftrightarrow \frac{8}{1 + 7e^{-0,2 \cdot x_0}} = 4 \Leftrightarrow 1 + 7e^{-0,2 \cdot x_0} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,2 \cdot x_0} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow -0,2 \cdot x_0 = \ln\frac{1}{7}$

$\Leftrightarrow -0,2 \cdot x_0 = -\ln 7 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\ln 7}{0,2} \approx 9,73$

Nach knapp 10 Tagen ist die Hälfte der maximal möglichen Fläche bedeckt.

d) Der Graph von A hat zum Zeitpunkt x_0 einen Wendepunkt und ist dort am steilsten. Die momentane Änderungsrate ist die erste Ableitung von A, wenn diese am größten ist, also einen Hochpunkt hat, ist die zweite Ableitung von A dort 0.

e)



K3/5 **5** **a)** $g(1,5) = -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1,5\right) = -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{16} \approx -0,278$

Die Testperson atmet gerade aus.

b) Das Luftvolumen in der Lunge ist minimal, wenn die Testperson gerade komplett ausgeatmet hat, also zu einem Zeitpunkt, an dem sie vom Ausatmen ($g(t) < 0$) zum Einatmen ($g(t) > 0$) wechselt. Das ist z. B. nach 2 s der Fall.

c) T: Zeit für einen vollständigen Atemzyklus: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4s} = \frac{1}{4}\,\text{Hz}$

d) $f_h = \frac{1}{4} \cdot 1,2 = \frac{3}{10}$

Es gilt: $b = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f_h = 2\pi \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{5}\pi$