Startklar

Quadratzahlen erkennen

K5/4

1

Potenz	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2
Quadrat-zahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

K5/6

2 $3 = 4 - 1 = 2^2 - 1^2$ $\quad 5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$

$7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$ $\quad 9 = 25 - 16 = 5^2 - 4^2$

$11 = 36 - 25 = 6^2 - 5^2$ $\quad 13 = 49 - 36 = 7^2 - 6^2$

$15 = 64 - 49 = 8^2 - 7^2$ $\quad 17 = 81 - 64 = 9^2 - 8^2$

Jede ungerade Zahl n größer als 1 lässt sich als $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ schreiben.

Potenzgesetze anwenden

K5

3 **a)** $5^3 = 125$ **b)** $4^2 + 4^3 = 80$ **c)** $4^5 = 1024$

d) $(-2)^0 = 1$ **e)** $0{,}5^6 = 0{,}015625$ **f)** $2^2 = 4$

g) $5^{-1} = 0{,}2$ **h)** $-0{,}5^4 = -0{,}0625$ **i)** $10^5 = 100\,000$

j) $(8 - 8)^3 = 0^3 = 0$

K6/5

4 Marvin hat 4^4 mit $4 \cdot 4$ gleichgesetzt, tatsächlich gilt: $4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.
Korrekt ist: $2^2 + 4^4 = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4 + 256 = 260$.

K5

5 **a)** a^7 **b)** $(-b)^4$ **c)** c^{12}

d) d^6 **e)** $6 \cdot e^6$ **f)** $(-f)^6$

g) g^6 **h)** h^{20} **i)** i^{21}

Gleichungen lösen

K5

6 **a)**
$7{,}5x - 9{,}8 > 3{,}1 - (-2{,}1) \quad | + 9{,}8$
$\Leftrightarrow \quad 7{,}5x > 15 \quad | : 7{,}5$
$\Leftrightarrow \quad x > 2$
$L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 2\}$

b)
$14x + 10^2 : (-50) \le 4{,}0 \cdot 8{,}5$
$\Leftrightarrow \quad 14x - 2 \le 34 \quad | + 2$
$\Leftrightarrow \quad 14x \le 36 \quad | : 14$
$\Leftrightarrow \quad x \le \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$
$L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le 2\frac{4}{7}\}$

c)
$15{,}5x - 2{,}5 \cdot (3x - 4) = 25 - 2^2$
$\Leftrightarrow \quad 8x + 10 = 21 \quad | - 10$
$\Leftrightarrow \quad 8x = 11 \quad | : 8$
$\Leftrightarrow \quad x = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$
$L = \{1\frac{3}{8}\}$

d)
$45{,}9 - 5 \cdot 9 < -3{,}5x - 6{,}1 \quad | + 6{,}1$
$\Leftrightarrow \quad 7 < -3{,}5x \quad | : (-3{,}5)$
$\Leftrightarrow \quad -\frac{7}{3{,}5} > x$
$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{7}{3{,}5} = -2$
$L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -2\}$

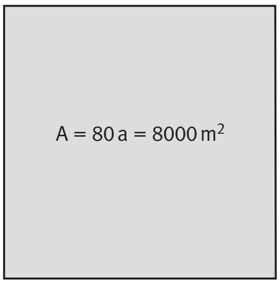
e)
$0{,}3 \cdot (6 - 9x) - (5 - 2x) > 1{,}8 - 4 \cdot 0{,}3$
$\Leftrightarrow \quad -3{,}2 - 0{,}7x > 0{,}6 \quad | + 3{,}2$
$\Leftrightarrow \quad -0{,}7x > 3{,}8 \quad | : (-0{,}7)$
$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{38}{7} = -5\frac{3}{7}$
$L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -5\frac{3}{7}\}$

f)
$25{,}8 + 49{,}02 \cdot 1{,}4 = 6{,}4x - 1{,}2x + 99{,}628$
$\Leftrightarrow \quad 94{,}428 = 5{,}2x + 99{,}628 \quad | - 99{,}628$
$\Leftrightarrow \quad -5{,}2 = 5{,}2x \quad | : 5{,}2$
$\Leftrightarrow \quad -1 = x$
$L = \{-1\}$

3 Reelle Zahlen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

K4/3
- 

K3/5
- Wäre der Flächeninhalt des Platzes $A = 100\,a = 10\,000\,m^2$, dann würde die Seitenlänge 100 m betragen.

K3/6
- Die Bestimmung der Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt A ist identisch mit der Bestimmung einer Seitenlänge, die quadriert eben diesen Flächeninhalt ergibt. Im Falle von Quadratzahlen ist die Seitenlänge meist im Kopf zu bestimmen. Liegt keine Quadratzahl zugrunde, erhält man eine Lösung durch Probieren, es bieten sich evtl. auch Näherungsverfahren an (Intervallschachtelung):
  Lösungsmöglichkeit für $80\,a = 8000\,m^2$:
  $(80\,m)^2 = 6400\,m^2$ (zu klein) $(83\,m)^2 = 6889\,m^2$ (zu klein)
  $(86\,m)^2 = 7396\,m^2$ (zu klein) $(89\,m)^2 = 7921\,m^2$ (zu klein)
  $(90\,m)^2 = 8100\,m^2$ (zu groß) $(89{,}5\,m)^2 = 8010{,}25\,m^2$ (zu groß)
  Die Näherung 89,5 m für die Seitenlänge des Veit-Stoß-Platzes ist damit recht gut. Genauer geht es natürlich mit dem Taschenrechner durch Wurzelziehen: $\sqrt{8000} \approx 89{,}4427\ldots$

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

3.1 Quadratwurzeln

Entdecken

K3/5
- ① gelbes Quadrat: $4\,cm^2$
  grünes Quadrat: $9\,cm^2$
  ② gelbes Quadrat: $2\,cm^2$
  grünes Quadrat: $5\,cm^2$

K5/6
- Seitenlängen:
  ① blaues Quadrat: 1 cm
  gelbes Quadrat: 2 cm
  grünes Quadrat: 3 cm
  ② blaues Quadrat: 1 cm
  gelbes Quadrat: ≈ 1,4 cm
  grünes Quadrat: ≈ 2,2 cm

Nachgefragt

K1/6
- Es kann keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl geben, denn wenn man eine Zahl (ungleich 0) quadriert, dann ist das Ergebnis immer positiv.

K1/6
- ① $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$
  ② $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$

Aufgaben

K3/5 **1**
a) neuer Flächeninhalt: $A = 2 \cdot 16\,cm^2 = 32\,cm^2$ $(A = 2 \cdot 25\,m^2 = 50\,cm^2)$
b) neue Seitenlänge: $a = \sqrt{32}\,cm \approx 5{,}7\,cm$ $(a = \sqrt{50}\,cm \approx 7{,}1\,cm)$
c) $A = 2 \cdot 25\,cm^2 = 50\,cm^2$ $(a = \sqrt{50}\,cm \approx 7{,}1\,cm)$

K5 **2**

a)	6	7	9	10	11	13	15	20	25	30	100
b)	1	0,8	0,5	0,3	0,9	1,1	1,2	0,1	0,01	0,04	

K3/5 **3**
$A_{Rechteck} = 64\,m \cdot 25\,m = 1600\,m^2$
$A_{Quadrat} = \sqrt{1600\,m^2} = 40\,m$, da $40\,m \cdot 40\,m = 1600\,m^2$
Die Seitenlänge des quadratischen Grundstücks beträgt 40 m.
Die Bestimmung der Seitenlänge eines quadratischen Grundstücks entspricht dem Wurzelziehen.

K5 **4**
a) $\sqrt{121} = 11$ **b)** $\sqrt{100} = 10$ **c)** $\sqrt{144} = 12$ **d)** $\sqrt{625} = 25$ oder $\sqrt{225} = 15$
e) $\sqrt{64} = 8$ **f)** $\sqrt{400} = 20$ **g)** $\sqrt{256} = 16$ **h)** $\sqrt{576} = 24$ oder $\sqrt{676} = 26$

K6/1 **5**
a) Wird ein Radikand mit 100 multipliziert oder durch 100 dividiert, so ist die Wurzel aus dieser Zahl das 10-Fache bzw. der 10. Teil des Wurzelwerts des Radikanden; z. B. sei der Radikand 0,04:
$\sqrt{0{,}04 \cdot 100} = \sqrt{4} = 2 = 0{,}2 \cdot 10 = \sqrt{0{,}04} \cdot 10$
$\sqrt{0{,}04 : 100} = \sqrt{0{,}0004} = 0{,}02 = \sqrt{0{,}04} : 10$
b)
① $\sqrt{62\,500} = 250$ $\sqrt{0{,}0625} = 0{,}25$ $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ $\sqrt{625\,000\,000} = 25\,000$
② $\sqrt{3\,610\,000} = 1900$ $\sqrt{0{,}000361} = 0{,}019$ $\sqrt{361} = 19$ $\sqrt{36\,100} = 190$
③ $\sqrt{4{,}84} = 2{,}2$ $\sqrt{0{,}0484} = 0{,}22$ $\sqrt{484\,000\,000} = 22\,000$ $\sqrt{484} = 22$

K6/5 **6** **a)** Ist die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl (also die Wurzel eines Radikanden) nicht sofort ersichtlich, so kann man die nächstkleinere und die nächstgrößere Quadratzahl dieser Zahl suchen. Da das Quadrieren bzw. Wurzelziehen an den Größenverhältnissen nichts ändert, kann man die Wurzel des Radikanden auf diese Weise zwischen zwei natürlichen Zahlen eingrenzen.

b) 1 $4 < \sqrt{20} < 5$; $6 < \sqrt{40} < 7$
2 $3 < \sqrt{12} < 4$; $9 < \sqrt{85} < 10$
3 $8 < \sqrt{70} < 9$; $26 < \sqrt{700} < 27$
4 $10 < \sqrt{111} < 11$; $14 < \sqrt{200} < 15$
5 $22 < \sqrt{500} < 23$; $31 < \sqrt{999} < 32$

K5/1 **7** **a)** {50; 51; …; 62; 63} **b)** {40; 41; …; 47; 48} **c)** {240; 241; …; 248; 249}
d) {26; 27; …; 34; 35} **e)** {82; 92} **f)** {148; 158; 168}
g) {401; 402; …; 439; 440} **h)** {205; 215}

K5/3 **8** (Die Einheiten der Seitenlängen und Flächeninhalte wurden passend vereinheitlicht.)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	324 cm²	576 m²	1225 cm²	134,56 cm²	16 900 m²	49 dm²
a	18 cm	24 m	35 cm	11,6 cm	130 m	7 dm
b	27 cm	40 m	25 cm	2,9 cm	100 m	3,5 dm
c	12 cm	14,4 m	49 cm	46,4 cm	169 m	14 dm

3.2 Menge der reellen Zahlen

Entdecken

K4/6
- Es sind individuelle Lösungen möglich.
  Leon: Da $1 < 2 < 4$ gilt, muss $\sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} < 2 = \sqrt{4}$ gelten.
  Paul: $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2$
  $\sqrt{2}$ muss somit zwischen 1,4 und 1,5 liegen, also weitere Dezimalstellen besitzen.
  Sophie: Wenn die Seitenlänge des Quadrats $\sqrt{2}$ cm ist, beträgt der Flächeninhalt des Quadrats $(\sqrt{2}\,\text{cm})^2 = 2\,\text{cm}^2$. Damit lässt sich die Zahl $\sqrt{2}$ wie von Sophie skizziert auf dem Zahlenstrahl konstruieren.

K1/4
- Der Flächeninhalt des eingezeichneten Dreiecks ist ein Viertel des Flächeninhalts des Quadrats, wie man durch Einzeichnen der Diagonalen im Quadrat sieht. Damit gilt:
  $A_{\text{Quadrat}} = 4 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 2\,\text{cm}^2$

K5/4
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten individuelle Näherungswerte für $\sqrt{2}$.

Nachgefragt

K1/6
- Die Aussage ist falsch. Es gibt reelle Zahlen, die nicht rational sind, z. B. $\sqrt{2}$.

K1/6
- Durch Anhängen weiterer Nachkommastellen lassen sich beliebig viele Zahlen, die größer als 1,6 und kleiner als 1,7 sind, erzeugen, z. B.: 1,601, 1,6001; 1,60001; …

Aufgaben

K1/6

1 **a)**
1. $144 = 12^2$, also ist $\sqrt{144}$ (= 12) rational.
2. Der Radikand 1000 ist keine Quadratzahl, also ist $\sqrt{1000}$ irrational.
3. $324 = 18^2$, also ist $\sqrt{324}$ (= 18) rational.
4. $\frac{2}{5}$ ist ein Bruch zweier natürlicher Zahlen, also rational.
5. 9 und 16 sind Quadratzahlen und es gilt $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$. Dies ist eine rationale Zahl.
6. $\frac{5}{36}$ ist ein Bruch zweier natürlicher Zahlen, also rational.

b)
1. $6 < \sqrt{37} < 7$, da $6^2 < 37 < 7^2$
2. $21 < \sqrt{480} < 22$, da $21^2 < 480 < 22^2$
3. $8 < \sqrt{75} < 9$, da $8^2 < 75 < 9^2$
4. $27 < \sqrt{750} < 28$, da $27^2 < 750 < 28^2$
5. $31 < \sqrt{1000} < 32$, da $31^2 < 1000 < 32^2$

K1/6

2 **a)** Das ist richtig, denn $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2$.
b) Das ist richtig, denn $\sqrt{4} = 2$.
c) Das ist richtig. Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der reellen Zahlen.
d) Das ist falsch, denn $\sqrt{2}$ beispielsweise ist zwar reell, aber nicht rational. Die Umkehrung wäre richtig, denn die rationalen Zahlen sind eine Teilmenge der reellen Zahlen.
e) Das ist falsch. Man kann das mit einem Widerspruchsbeweis zeigen.
Voraussetzung: x ist irrational.
Annahme: 10x ist rational.
Wenn die Annahme stimmt, dann ist $10x : 10 = x$ ebenfalls rational, was der Voraussetzung widerspricht.

K5/1 **3** **a)** $\sqrt{5} \boxed{<} \sqrt{6}$ **b)** $1{,}5 \boxed{<} \sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{10} \boxed{<} \left(\sqrt{10}\right)^2$ **d)** $\sqrt{25{,}25} \boxed{>} 5$
e) $\frac{12}{7} \boxed{<} \sqrt{3}$ **f)** $3\frac{1}{3} \boxed{>} \sqrt{11}$ **g)** $\sqrt{27{,}04} \boxed{=} 5{,}2$ **h)** $\sqrt{\frac{1}{9}} \boxed{<} \sqrt{\frac{1}{3}}$

K5 **4** **a)** $\approx 2{,}2361$ **b)** $\approx 4{,}7958$ **c)** $\approx 6{,}4807$ **d)** $\approx 0{,}9608$ **e)** $\approx 6{,}9282$

K5/4 **5** Die prozentuale Abweichung des auf zwei bzw. drei Nachkommastellen gerundeten Wertes vom Ausgangswert a berechnet sich mittels des Abweichungsbetrags b mit der Formel: $\frac{b}{a} \cdot 100$.

a)

		Wurzelwert: zwei Nachkommastellen	quadriert	Betrag der Abweichung	Prozentuale Abweichung (gerundet)
1	$\sqrt{6}$	2,45	6,0025	0,0025	0,04167 %
2	$\sqrt{10}$	3,16	9,9856	0,0144	0,14400 %
3	$\sqrt{43}$	6,56	43,0336	0,0336	0,07814 %
4	$\sqrt{700}$	26,46	700,1316	0,1316	0,01880 %
5	$\sqrt{1000}$	31,62	999,8244	0,1756	0,01756 %

b)

		Wurzelwert: drei Nachkommastellen	quadriert	Betrag der Abweichung	Prozentuale Abweichung (gerundet)
1	$\sqrt{6}$	2,449	5,997601	0,002399	0,03998 %
2	$\sqrt{10}$	3,162	9,998244	0,001756	0,01756 %
3	$\sqrt{43}$	6,557	42,994249	0,005751	0,01337 %
4	$\sqrt{700}$	26,458	700,025764	0,025764	0,00368 %
5	$\sqrt{1000}$	31,623	1000,014129	0,014129	0,00141 %

Wissen

K1/6 **a)** 1 Annahme: $\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl.
Dann lässt sich $\sqrt{3}$ als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}$) schreiben: $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$.
Daraus folgt:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad |\,^2$$

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \quad |\cdot q^2$$

$$3q^2 = p^2$$

$3q^2$ ist durch 3 teilbar, deshalb ist auch p^2 durch 3 teilbar.
Damit muss p ein Vielfaches von 3 sein: $p = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$).
Einsetzen ergibt: $3q^2 = (3k)^2$, also $q^2 = 3k^2$. Damit ist auch q ein Vielfaches von 3. p und q sind also beide durch 3 teilbar im Widerspruch dazu, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist.
Die Annahme, dass $\sqrt{3}$ eine rationale Zahl ist, ist somit falsch. $\sqrt{3}$ ist keine rationale Zahl.

2 Der Beweis für $\sqrt{5}$ erfolgt analog zu dem für $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.

K6/5 **6** **a)** $\sqrt{7}$ muss zwischen 2 und 3 liegen, da $2^2 < 7 < 3^2$.

b) Ermittlung der Dezimalstellen von $\sqrt{7}$ zu den jeweils angegebenen Start- und Endwerten bei einer Schrittweite von 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001:

2 < 3	
x	x^2
2,0	4,00
2,1	4,41
2,2	4,84
2,3	5,29
2,4	5,76
2,5	6,25
2,6	6,76
2,7	7,29
2,8	7,84
2,9	8,41
3,0	9,00

2,6 < 2,7	
x	x^2
2,60	6,7600
2,61	6,8121
2,62	6,8644
2,63	6,9169
2,64	6,9696
2,65	7,0225
2,66	7,0756
2,67	7,1289
2,68	7,1824
2,69	7,2361
2,70	7,2900

2,64 < 2,65	
x	x^2
2,640	6,969600
2,641	6,974881
2,642	6,980164
2,643	6,985449
2,644	6,990736
2,645	6,996025
2,646	7,001316
2,647	7,006609
2,648	7,011904
2,649	7,017201
2,650	7,022500

2,645 < 2,646	
x	x^2
2,6450	6,99602500
2,6451	6,99655401
2,6452	6,99708304
2,6453	6,99761209
2,6454	6,99814116
2,6455	6,99867025
2,6456	6,99919936
2,6457	6,99972849
2,6458	7,00025764
2,6459	7,00078681
2,6460	7,00131600

Es folgt jeweils:

$\sqrt{7}$ muss zwischen 2,6 und 2,7 liegen, da $2{,}6^2 < 7 < 2{,}7^2$.

$\sqrt{7}$ muss zwischen 2,64 und 2,65 liegen, da $2{,}64^2 < 7 < 2{,}65^2$.

$\sqrt{7}$ muss zwischen 2,645 und 2,646 liegen, da $2{,}645^2 < 7 < 2{,}646^2$.

$\sqrt{7}$ muss zwischen 2,6457 und 2,6458 liegen, da $2{,}6457^2 < 7 < 2{,}6458^2$.

Taschenrechner: $\sqrt{7} = 2{,}645751311$

c) Es sind individuelle Antworten möglich.

K6/5 **7** **a)** Berechnung von $\sqrt{2}$:

Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert^2
1	1	2	1,5	$1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$, also oberen Wert ersetzen
2	1	1,5	1,25	$1{,}25^2 = 1{,}5625 < 2$, also unteren Wert ersetzen
3	1,25	1,5	1,375	$1{,}375^2 \approx 1{,}89 < 2$, also unteren Wert ersetzen
4	1,375	1,5	1,4375	$1{,}4375^2 \approx 2{,}07 > 2$, also oberen Wert ersetzen
5	1,375	1,4375	1,40625	$1{,}40625^2 \approx 1{,}98 < 2$, also unteren Wert ersetzen
6	1,40625	1,4375	1,421875	$1{,}421875^2 \approx 2{,}02 > 2$, also oberen Wert ersetzen
7	1,40625	1,421875	...	...

Berechnung von $\sqrt{8}$:

Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert^2
1	2	3	2,5	$2{,}5^2 = 6{,}25 < 8$, also unteren Wert ersetzen
2	2,5	3	2,75	$2{,}75^2 = 7{,}5625 < 8$, also unteren Wert ersetzen
3	2,75	3	2,875	$2{,}875^2 \approx 8{,}27 > 8$, also oberen Wert ersetzen
4	2,75	2,875	2,8125	$2{,}8125^2 \approx 7{,}91 < 8$, also unteren Wert ersetzen
5	2,8125	2,875	2,84375	$2{,}84375^2 \approx 8{,}09 > 8$, also oberen Wert ersetzen
6	2,8125	2,84375	2,828125	$2{,}828125^2 \approx 7{,}998 < 8$, also unteren Wert ersetzen
7	2,828125	2,84375	...	...

Berechnung von $\sqrt{500}$:

Schritt	unterer Wert	oberer Wert	Mittelwert	Mittelwert^2
1	22	23	22,5	$22{,}5^2 = 506{,}25 > 500$, also oberen Wert ersetzen
2	22	22,5	22,25	$22{,}25^2 \approx 495{,}06 < 500$, also unteren Wert ersetzen
3	22,25	22,5	22,375	$22{,}375^2 \approx 500{,}64 > 500$, also oberen Wert ersetzen
4	22,25	22,375	22,3125	$22{,}3125^2 \approx 497{,}85 < 500$, also unteren Wert ersetzen
5	22,3125	22,375	22,34375	$22{,}34375^2 \approx 499{,}24 < 500$, also unteren Wert ersetzen
6	22,34375	22,375	22,359375	$22{,}359375^2 \approx 499{,}9 < 500$, also unteren Wert ersetzen
7	22,359375	22,375	...	...

b) Bei der „Intervallhalbierung" geht es darum, das Intervall um die gesuchte Zahl immer enger zu gestalten und sich so von beiden Seiten immer näher an die gesuchte Zahl hinzuarbeiten.

c) Entscheidend ist, dass man beim Erstellen des Tabellenblattes eine Fallunterscheidung einbaut, etwa wie unten in den Zeilen B7 und B8 (in der unteren Abbildung) dargestellt.

	A	B	C	D	E
1	**Intervallhalbierungsverfahren**				
2					
3	**Berechnung von Wurzel**		2		
4					
5	**Schritt**	**unterer Wert**	**oberer Wert**	**Mittelwert**	**Mittelwert²**
6	0	0	2	1	1
7	1	1	2	1,5	2,25
8	2	1	1,5	1,25	1,5625
9	3	1,25	1,5	1,375	1,890625
10	4	1,375	1,5	1,4375	2,06640625
11	5	1,375	1,4375	1,40625	1,97753906
12	6	1,40625	1,4375	1,421875	2,02172852
13	7	1,40625	1,421875	1,4140625	1,99957275
14	8	1,4140625	1,421875	1,41796875	2,01063538
15	9	1,4140625	1,41796875	1,416015625	2,00510025
16	10	1,4140625	1,416015625	1,415039063	2,00233555
17	11	1,4140625	1,415039063	1,414550781	2,00095391

	A	B	C	D	E
1	**Intervallhalbierungsverfahren**				
2					
3	**Berechnung von Wurzel**		2		
4					
5	**Schritt**	**unterer Wert**	**oberer Wert**	**Mittelwert**	**Mittelwert²**
6	0	0	=C3	=MITTELWERT(B6:C6)	=D6^2
7	1	=WENN(E6<C3;D6;B6)	=WENN(E6>C3;D6;C6)	=MITTELWERT(B7:C7)	=D7^2
8	2	=WENN(E7<C3;D7;B7)	=WENN(E7>C3;D7;C7)	=MITTELWERT(B8:C8)	=D8^2

Erstellt man das Tabellenblatt wie angegeben, so genügt es, wenn man in Zelle C3 den neuen Quadratwert eingibt. Die Berechnung aktualisiert sich dann selbstständig. Für die Erstellung des eigentlichen Algorithmus wird man die Zeilen 6 und 7 komplett eingeben, anschließend die Matrix B7:E7 markieren und mit der Maus nach unten ziehen.

K5/6 **8** **a)** $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{4}{15} = 0{,}2\overline{6}$; $\frac{8}{9} = 0{,}\overline{8}$; $\frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6}$; $\frac{9}{16} = 0{,}5625$; $\frac{10}{27} = 0{,}\overline{370}$; $\frac{8}{21} = 0{,}\overline{380952}$

b) nicht periodische Brüche: $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{16}$

periodische Brüche: $\frac{4}{15}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{10}{27}$; $\frac{8}{21}$

c) Die Dezimaldarstellung von Brüchen ist entweder periodisch (und damit unendlich) oder abbrechend, also endlich.
Die Dezimaldarstellung von irrationalen Zahlen, beispielsweise von $\sqrt{2}$, hingegen ist demzufolge weder abbrechend noch periodisch. Die unendliche Dezimaldarstellung folgt hier also keinem sich wiederholenden Schema, sodass man, auf wie viele Stellen genau man auch immer den Wert einer irrationalen Zahl angibt, notwendigerweise immer nur „die ersten paar Ziffern" einer solchen Darstellung angeben kann.

Methode

K5/4

Heronverfahren

- **a)** Bestimmung von $\sqrt{2}$:

  $a = 2\,\text{cm}$ | $b = 1\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{2\,\text{cm} + 1\,\text{cm}}{2} = 1{,}5\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{2\,\text{cm}^2}{1{,}5\,\text{cm}} \approx 1{,}333\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{1{,}5\,\text{cm} + 1{,}333\,\text{cm}}{2} \approx 1{,}417\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{2\,\text{cm}^2}{1{,}417\,\text{cm}} \approx 1{,}411\,\text{cm}$ | $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

  b) Bestimmung von $\sqrt{6}$:

  $a = 3\,\text{cm}$ | $b = 2\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{3\,\text{cm} + 2\,\text{cm}}{2} = 2{,}5\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{6\,\text{cm}^2}{2{,}5\,\text{cm}} = 2{,}4\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{2{,}5\,\text{cm} + 2{,}4\,\text{cm}}{2} = 2{,}45\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{6\,\text{cm}^2}{2{,}45\,\text{cm}} \approx 2{,}449\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{2{,}45\,\text{cm} + 2{,}449\,\text{cm}}{2} \approx 2{,}450\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{6\,\text{cm}^2}{2{,}450\,\text{cm}} \approx 2{,}449\,\text{cm}$ | $\sqrt{6} \approx 2{,}45$

  c) Bestimmung von $\sqrt{12}$:

  $a = 4\,\text{cm}$ | $b = 3\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{4\,\text{cm} + 3\,\text{cm}}{2} = 3{,}5\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{12\,\text{cm}^2}{3{,}5\,\text{cm}} \approx 3{,}429\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{3{,}5\,\text{cm} + 3{,}429\,\text{cm}}{2} \approx 3{,}465\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{12\,\text{cm}^2}{3{,}465\,\text{cm}} \approx 3{,}463\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{3{,}465\,\text{cm} + 3{,}463\,\text{cm}}{2} = 3{,}464\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{12\,\text{cm}^2}{3{,}464\,\text{cm}} \approx 3{,}464\,\text{cm}$ | $\sqrt{12} \approx 3{,}46$

  d) Bestimmung von $\sqrt{20}$:

  $a = 5\,\text{cm}$ | $b = 4\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{5\,\text{cm} + 4\,\text{cm}}{2} = 4{,}5\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{20\,\text{cm}^2}{4{,}5\,\text{cm}} \approx 4{,}444\,\text{cm}$

  $a_{neu} = \frac{4{,}5\,\text{cm} + 4{,}444\,\text{cm}}{2} = 4{,}472\,\text{cm}$ | $b_{neu} = \frac{20\,\text{cm}^2}{4{,}472\,\text{cm}} \approx 4{,}472\,\text{cm}$ | $\sqrt{20} \approx 4{,}47$

K5/6

Heronverfahren mit dem Computer

- Das Tabellenblatt zeigt das Verfahren für die Berechnung von $\sqrt{10}$. Die Tabelle hat vier Spalten: Anzahl der Schritte, Länge des Rechtecks, Breite des Reckteck s, Flächeninhalt des Rechtecks. Die Zelle C3 enthält die Zahl, deren Wurzel berechnet werden soll. In den Zellen B6 und C6 stehen die Startwerte. Ab Zelle B7 steht in Spalte B jeweils das arithmetische Mittel aus der Länge und Breite des letzten Rechtecks. Ab Zelle C7 steht in Spalte C jeweils der Quotient aus der Ausgangszahl (Zelle C3) und dem Wert in Spalte B. Spalte D enthält das Produkt der Werte aus den Spalten B und C.
-

	A	B	C	D
1	Heronverfahren			
2				
3	Berechnung von Wurzel		40	
4				
5	Schritt	Länge	Breite	Kontrolle
6	1	8	5	40
7	2	6,5	6,15384615	40
8	3	6,32692308	6,32218845	40
9	4	6,32455576	6,32455488	40
10	5	6,32455532	6,32455532	40
11	6	6,32455532	6,32455532	40
12	7	6,32455532	6,32455532	40

$\sqrt{40} = 6{,}3245...$

	A	B	C	D
1	Heronverfahren			
2				
3	Berechnung von Wurzel		99	
4				
5	Schritt	Länge	Breite	Kontrolle
6	1	10	9,9	99
7	2	9,95	9,94974874	99
8	3	9,94987437	9,94987437	99
9	4	9,94987437	9,94987437	99
10	5	9,94987437	9,94987437	99
11	6	9,94987437	9,94987437	99
12	7	9,94987437	9,94987437	99

$\sqrt{99} = 9{,}9498...$

Entdecken

K5/6 ■ $\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{9\cdot 4}$ $\quad$ $\sqrt{6}\cdot\sqrt{13{,}5}=\sqrt{6\cdot 13{,}5}$ $\quad$ $\sqrt{81}+\sqrt{16}\neq\sqrt{81+16}$

$\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}}=\sqrt{\frac{225}{100}}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}$

$\sqrt{7+9}\neq\sqrt{7}+\sqrt{9}$ $\quad$ $\sqrt{16-9}\neq\sqrt{16}-\sqrt{9}$ $\quad$ $\sqrt{64}-\sqrt{15}\neq\sqrt{64-15}$

K5/6 ■ Die Gleichheit gilt für die Multiplikation und die Division von Wurzeln.

K5/6 ■ Beim Multiplizieren bzw. Dividieren von Wurzeln können die Faktoren bzw. Divisoren und Dividenden unter eine Wurzel geschrieben werden. Bei der Addition bzw. Subtraktion ist dies nicht möglich.

Nachgefragt

K1/6 ■ Die Umformung ist richtig, da das Kommutativgesetz auch bei der Addition von Wurzeln gilt.

K1/6 ■ Die Wurzel aus einer nicht negativen Zahl ist als diejenige nicht negative Zahl definiert, deren Quadrat die ursprüngliche Zahl ist. Wegen $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2=x$ gilt somit die angegebene Beziehung.

K1/6 ■ Quadratwurzeln sind nur dann definiert, wenn der Radikand größer oder gleich null ist. Für $\sqrt{x-5}$ muss also gelten: $x-5\geq 0$, also $x\geq 5$.

Aufgaben

K5 **1** **a)** 6 **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** 14 **d)** 36 **e)** 9 **f)** 2
g) 10 **h)** 52 **i)** 10 **j)** $1\frac{1}{2}$ **k)** $\frac{3}{4}$ **l)** 10
m) 0 **n)** 15 **o)** $\frac{6}{7}$ **p)** 3

K5 **2** **a)** 9 **b)** $\sqrt{85}$ **c)** 8 **d)** 5
e) 10 **f)** $\sqrt{60}=2\sqrt{15}$ **g)** $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **h)** 30
i) $\frac{\sqrt{24}}{7}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$ **j)** $\sqrt{\frac{35}{5}}=\sqrt{7}$ **k)** $\sqrt{\frac{162}{289}}=\frac{9}{17}\sqrt{2}$ **l)** $10\sqrt{3}$
m) $\sqrt{68}=2\sqrt{17}$ **n)** $3\sqrt{11}$ **o)** $\frac{\sqrt{243}}{6}=\frac{9\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **p)** $\sqrt{4}=2$

K5 **3**

20	$\sqrt{1125}:\sqrt{5}$	→	15	$\sqrt{32}\cdot\sqrt{8}$	→	16	$\sqrt{324}:\sqrt{4}$	→
9	$\sqrt{1690}:\sqrt{10}$	→	13	$\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}$	→	18	$\sqrt{36}\cdot\sqrt{16}$	→
24	$\frac{\sqrt{432}}{\sqrt{27}}$	→	4	$\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$	→	12	$\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{5}}$	→

K5/6 **4** **a)**
1. $4\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = \sqrt{7} \cdot (4 + 2) = 6\sqrt{7}$
2. $4\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5} \cdot (4 - 1) = 3\sqrt{5}$
3. $6\sqrt{3} + 10 - 2\sqrt{3} - 4 = \sqrt{3} \cdot (6 - 2) + 10 - 4 = 4\sqrt{3} + 6$
4. $3\sqrt{5} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{5} + 6\sqrt{7} = \sqrt{7} \cdot (-5 + 6) + \sqrt{5} \cdot (3 + 4) = \sqrt{7} + 7\sqrt{5}$
5. $5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 4\sqrt{6} = \sqrt{3} \cdot (5 + 4) - 5\sqrt{5} + 4\sqrt{6} = 9\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 4\sqrt{6}$

b) Wurzeln lassen sich addieren bzw. subtrahieren, wenn die Zahl unter der Wurzel (also der Radikand) dieselbe ist.
Hier sind viele individuelle Beispiele möglich.

K5 **5** **a)**

$$\begin{tikzcd}
\sqrt{5} \arrow[r, "\cdot\sqrt{4}"] \arrow[d, "\cdot\sqrt{5}"] & 2\cdot\sqrt{5} \arrow[r] \arrow[d] & 4\cdot\sqrt{5} \arrow[d] \\
5 \arrow[r] \arrow[d] & 10 \arrow[r] \arrow[d] & 20 \arrow[d] \\
5\cdot\sqrt{5} \arrow[r] & 10\cdot\sqrt{5} \arrow[r] & 20\cdot\sqrt{5}
\end{tikzcd}$$

b)

$$\begin{tikzcd}
\sqrt{504} \arrow[r, ":\sqrt{2}"] \arrow[d, ":\sqrt{3}"] & \sqrt{252} \arrow[r] \arrow[d] & \sqrt{126} \arrow[d] \\
\sqrt{168} \arrow[r] \arrow[d] & \sqrt{84} \arrow[r] \arrow[d] & \sqrt{42} \arrow[d] \\
\sqrt{56} \arrow[r] & \sqrt{28} \arrow[r] & \sqrt{14}
\end{tikzcd}$$

K5 **6**
a) $\sqrt{4 \cdot 12{,}5} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}07$
b) $\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{112}{14}} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}83$
c) $\sqrt{\frac{2 \cdot 91}{7}} = \sqrt{2 \cdot 13} = \sqrt{26} \approx 5{,}10$
d) $\sqrt{\frac{0{,}0045}{0{,}0003}} = \sqrt{15} \approx 3{,}87$
e) $\sqrt{2 \cdot 3{,}6 \cdot 50} = \sqrt{36 \cdot 10} = 6 \cdot \sqrt{10} \approx 18{,}97$
f) $\sqrt{12{,}5 \cdot 21 \cdot 8} = \sqrt{100 \cdot 21} = 10 \cdot \sqrt{21} \approx 45{,}83$
g) $\sqrt{\frac{3 \cdot 49}{7 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}53$
h) $\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 8 \cdot 15}{5}} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4{,}24$
i) $\sqrt{\frac{31 \cdot 32}{6{,}4}} = \sqrt{31 \cdot 5} = \sqrt{155} \approx 12{,}45$

K1/6 **7** Der Radikand wird als Produkt geschrieben, so dass möglichst viele Faktoren Quadratzahlen oder Quadrate von Variablen sind. Dabei werden die bekannten Rechengesetze (Assoziativgesetz, Distributivgesetz, Kommutativgesetz) angewandt. Aus diesen quadratischen Faktoren wird dann die Wurzel gezogen.

K5 **8**
a) $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
b) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
c) $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$
d) $\sqrt{343} = 7\sqrt{7}$
e) $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
f) $\sqrt{18} + \sqrt{45} = 3\,(\sqrt{2} + \sqrt{5})$
g) $\sqrt{80} - \sqrt{112} = 4\,(\sqrt{5} - \sqrt{7})$
h) $\sqrt{99} + \sqrt{44} = 5\sqrt{11}$
i) $\frac{\sqrt{60} + \sqrt{15}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{5}$
j) $\frac{\sqrt{25} - \sqrt{175}}{\sqrt{63}} = \frac{5 - 5\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$
k) $\frac{\sqrt{700} - \sqrt{112}}{\sqrt{175} + \sqrt{63}} = \frac{10\sqrt{7} - 4\sqrt{7}}{5\sqrt{7} + 3\sqrt{7}} = \frac{3}{4}$
l) $\frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{176}} = \frac{11\sqrt{11}}{4\sqrt{11}} = 2\frac{3}{4}$

K6/5 **9**
a) Das ist falsch. Richtig ist: $\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}$.
Will man die Zahl 6 als Radikand beibehalten, dann gilt: $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.
b) Das ist falsch. Der Term kann nicht weiter vereinfacht werden.
c) Das ist falsch. Richtig ist: $\sqrt{\frac{5}{20}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

K1/5 **10**
a) $\sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$
b) $\sqrt{\frac{18}{98}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9}{2 \cdot 49}} \cdot \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$
c) $\sqrt{\frac{75}{48}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 25}{3 \cdot 16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$
d) $\sqrt{\frac{180}{36}} = \sqrt{5}$
e) $\sqrt{\frac{125}{320}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 25}{5 \cdot 64}} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$
f) $\sqrt{\frac{162}{72}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 18}{4 \cdot 18}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

K1/5 **11 a)** $\sqrt{180 \cdot x^5} = \sqrt{180} \cdot \sqrt{x^5} = 6\sqrt{5} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{x} = 6x^2\sqrt{5x}$

b) $\sqrt{\frac{200}{x}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{x}} = 10\sqrt{\frac{2}{x}}$

c) $\sqrt{128 \cdot x^3} = \sqrt{2 \cdot 64} \cdot \sqrt{x \cdot x^2} = 8\sqrt{2} \cdot x\sqrt{x}$

Die jeweilige Einschränkung für x stellt sicher, dass der Radikand nicht negativ bzw. der Nenner nicht null wird.

K1/5 **12 a)** $\sqrt{18} = \boxed{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{1}}} = \boxed{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{144}}{2\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{4}}} = \boxed{3\sqrt{2}}$

b) Es sind individuelle Lösungen möglich.

K5 **13 a)** $8\sqrt{2} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{128}$

b) $11\sqrt{5} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{605}$

c) $30\sqrt{10} = \sqrt{900} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{9000}$

d) $39b \cdot \sqrt{3a} = \sqrt{1521b^2} \cdot \sqrt{3a} = \sqrt{4563ab^2}$

e) $10\sqrt{0{,}2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{0{,}2} = \sqrt{20}$

f) $0{,}3\sqrt{200} = \sqrt{0{,}09} \cdot \sqrt{200} = \sqrt{18}$

g) $25\sqrt{\frac{1}{625}} = \sqrt{625} \cdot \sqrt{\frac{1}{625}} = \sqrt{1} = 1$

h) $3{,}6b^2\sqrt{300} = \sqrt{12{,}96b^4} \cdot \sqrt{300} = \sqrt{3888b^4}$

K5 **14**

Start	$\sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$	$\longrightarrow$	$a\sqrt{5}$	$\sqrt{27a^3} = 3a\sqrt{3a}$	$\longrightarrow$
$3a\sqrt{3a}$	$\sqrt{175a^5b^2c^3} = 5a^2bc\sqrt{7ac}$	$\longrightarrow$	$5a^2bc\sqrt{7ac}$	$\frac{\sqrt{18a^3b}}{\sqrt{27}} = a \cdot \frac{\sqrt{2ab}}{3}$	$\longrightarrow$
$a\sqrt{\frac{2ab}{3}}$	$\sqrt{21a^7 + 29a^7} = 5a^3\sqrt{2a}$	$\longrightarrow$	$5a^3\sqrt{2a}$	$\frac{\sqrt{80a^4 + a^4}}{\sqrt{2b^2}} = \frac{9a^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\longrightarrow$
$\frac{9a^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{3a^3 \cdot 2b^4}}{\sqrt{4a^3 \cdot 3b^4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	Ziel	

K6/5 **15 a)** 1 Anwenden des Wurzelgesetzes $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, dann Radikanden zusammenfassen, schließlich radizieren

2 Anwenden des Wurzelgesetzes $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, dann Radikanden zusammenfassen, schließlich radizieren

b) 1 $\sqrt{\frac{xy^5}{x^3y^3}} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}$

2 $\sqrt{64x^2} = 8x$

3 $\sqrt{\frac{0{,}4a^2}{0{,}625}} = \sqrt{\frac{400a^2}{625}} = \frac{20a}{25} = \frac{4}{5}a$

4 $\sqrt{3a \cdot 12ab^2} = \sqrt{36a^2 \cdot b^2} = 6ab$

5 $\sqrt{\frac{12a}{3a^3}} = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a}$

6 $\sqrt{\frac{18a^3b^3}{2ab}} = \sqrt{9a^2b^2} = 3ab$

7 $\sqrt{\frac{150x^3}{216x}} = \sqrt{\frac{25x^2}{36}} = \frac{5}{6}x$

8 $\sqrt{\frac{45a^2}{245a^4}} = \sqrt{\frac{9}{49a^2}} = \frac{3}{7a}$

9 $\sqrt{8x^2y \cdot 18y} = \sqrt{144x^2y^2} = 12xy$

10 $\sqrt{\frac{48a^5x^3}{3a^3x}} = \sqrt{16a^2x^2} = 4ax$

K5 **16 a)** $\sqrt{8} : \sqrt{1} = 2\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{10}} = 7$

c) $2 \cdot \sqrt{\frac{18}{50}} = \frac{6}{5}$

d) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}} = \frac{2}{3}$

e) $3 \cdot \sqrt{\frac{25}{126{,}5625}} = \frac{4}{3}$

f) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{16}} = 4 \cdot \sqrt{2}$

KX **17 a)** Man betrachte folgende Darstellung eines Summenterms im Nenner:
$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; beziehungsweise $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Mithilfe der Verwendung der 3. binomischen Formel kann der Nenner offensichtlich rational gemacht werden: $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{c \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$ (analog zu $\frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$)

Betrachtet man jedoch die 1. binomische Formel (2. binomische Formel analog), ergibt sich folgender Term: $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{c \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \frac{c \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b}$

Dabei gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ und ein $b \in \mathbb{R}$, sodass der Nenner aufgrund des Terms $2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ nicht rational sein kann.

b) ① $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

② $\frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{8 \cdot \sqrt{5}}{5} = \frac{8}{5} \cdot \sqrt{5}$

③ $\frac{12}{\sqrt{15}} = \frac{12 \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{12 \cdot \sqrt{15}}{15} = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{15}$

④ $\frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{5 \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{5 \cdot \sqrt{15}}{15} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{15}$

⑤ $\frac{24}{\sqrt{32}} = \frac{24 \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}} = \frac{24 \cdot \sqrt{32}}{32} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{32} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 3\sqrt{2}$

⑥ $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4} - \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{4} \cdot (\sqrt{4} + \sqrt{7})}{(\sqrt{4} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{4} + \sqrt{7})} = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{-3}$

⑦ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3} - \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{12} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{11})}{(\sqrt{3} - \sqrt{11}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{11})} = \frac{\sqrt{36} + \sqrt{132}}{-8} = \frac{3 + \sqrt{33}}{-4}$

⑧ $\frac{9}{2 + \sqrt{7}} = \frac{9 \cdot (2 - \sqrt{7})}{(2 + \sqrt{7}) \cdot (2 - \sqrt{7})} = \frac{18 - 9\sqrt{7}}{-3} = -6 + 3\sqrt{7} = -3\,(2 - \sqrt{7})$

⑨ $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{13}}{\sqrt{7} - \sqrt{13}} = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{13})^2}{(\sqrt{7} - \sqrt{13}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{13})} = \frac{7 - 2\sqrt{91} + 13}{-6} = -\frac{10 + \sqrt{91}}{3}$

⑩ $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{6} - \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{6} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

KX **18** **a)** $\frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = 3\,\frac{\sqrt{x}}{x}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6 - c}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6 - c}}{\sqrt{6 - c} \cdot \sqrt{6 - c}} = \frac{\sqrt{30 - 5c}}{6 - c}$

c) $-\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = -\frac{(a - b) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = -\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{a} - a\sqrt{b} + b\sqrt{b}}{a - b} = -\frac{(a - b)\sqrt{a} + (b - a)\sqrt{b}}{a - b}$

d) $\frac{a}{\sqrt{3a} - \sqrt{2a}} = \frac{a \cdot (\sqrt{3a} + \sqrt{2a})}{(\sqrt{3a} - \sqrt{2a}) \cdot (\sqrt{3a} + \sqrt{2a})} = \frac{a\sqrt{3a} + a\sqrt{2a}}{a}$

e) $-\frac{a}{\sqrt{5 + a}} = -\frac{a \cdot (\sqrt{5 + a})}{(\sqrt{5 + a}) \cdot (\sqrt{5 + a})} = -\frac{a\sqrt{5 + a}}{5 + a}$

f) $\frac{a}{\sqrt{5} + a \cdot \sqrt{5}} = \frac{a \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{5}a)}{(\sqrt{5} + \sqrt{5}a) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{5}a)} = \frac{a\sqrt{5} - \sqrt{5}a^2}{5 - 5a^2} = \frac{\sqrt{5}a(1 - a)}{5(1 - a^2)} = \frac{\sqrt{5}a(1 - a)}{5(1 - a)\,(1 + a)} = \frac{\sqrt{5}a}{5(1 + a)}$

g) $\frac{8b}{\sqrt{11b} - \sqrt{7b}} = \frac{8b \cdot (\sqrt{11b} + \sqrt{7b})}{(\sqrt{11b} - \sqrt{7b}) \cdot (\sqrt{11b} + \sqrt{7b})} = \frac{8b\,(\sqrt{11b} + 8b\sqrt{7b})}{4b} = 2(\sqrt{11b} + \sqrt{7b})$

h) $\frac{\sqrt{5x} - 3\sqrt{2y}}{\sqrt{20x} + 4\sqrt{8y}} = \frac{(\sqrt{5x} - 3\sqrt{2y}) \cdot (\sqrt{20x} - 4\sqrt{8y})}{(\sqrt{20x} + 4\sqrt{8y}) \cdot (\sqrt{20x} - 4\sqrt{8y})} = \frac{\sqrt{100x^2} - 4\sqrt{40xy} - 3\sqrt{40xy} + 12\sqrt{16y^2}}{20x - 128y} = \frac{10x - 7\sqrt{40xy} + 48y}{20x - 128y}$

i) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{4x} + \sqrt{5y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{4x} - \sqrt{5y})}{(\sqrt{4x} + \sqrt{5y}) \cdot (\sqrt{4x} - \sqrt{5y})} = \frac{2x - \sqrt{5yx} - \sqrt{4yx} + \sqrt{5}y}{4x - 5y}$

j) $\frac{3x - 4\sqrt{y}}{3x + 4\sqrt{y}} = \frac{(3x - 4\sqrt{y}) \cdot (3x - 4\sqrt{y})}{(3x + 4\sqrt{y}) \cdot (3x - 4\sqrt{y})} = \frac{9x^2 - 24x\sqrt{y} + 16y}{9x^2 - 16y}$

Entdecken

K3/5

- Aufstellen der Gleichungen:
  1 $A = 6a^2 = 486\,cm^2$
  2 $A = a^2 = 36\,m^2$
  3 $A = 6a^2 = 1350\,mm^2$

K5/3

- Lösen der Gleichungen:
  1 $6a^2 = 486\,cm^2 \Leftrightarrow a^2 = 81\,cm^2 \Rightarrow a = 9\,cm$
  2 $a^2 = 36\,m^2 \Rightarrow a = 6\,m$
  3 $6a^2 = 1350\,mm^2 \Leftrightarrow a^2 = 225\,mm^2 \Rightarrow a = 15\,mm$
  Die negativen Lösungen der Gleichungen können im Sachkontext von Flächenberechnungen außer Acht gelassen werden.

Nachgefragt

K1/6

- Löst man eine quadratische Gleichung, so erhält man nach etwaigen Umformungen oft eine Gleichung der Form $x^2 = a$. Gesucht ist also diejenige Zahl, deren Quadrat a ergibt. Ist $a > 0$, so gibt es zwei Zahlen, nämlich $-\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}$, die diese Bedingung erfüllen.

K1/6

- Die Gleichung $x^2 = 9$ hätte in $\mathbb{R}$ zwei Lösungen, nämlich –3 und 3. Die negative Lösung entfällt aber, da sie nicht Teil der Grundmenge der natürlichen Zahlen ist, die bei dieser Aufgabe gegeben ist.

Aufgaben

K5

1 **a)** $x = \pm 12$ **b)** $x = \pm 7$ **c)** $x = \pm 0{,}9$ **d)** $x = \pm 25$ **e)** $x = \pm 0{,}1$
f) $x = \pm 4$ **g)** $x = \pm \frac{2}{3}$ **h)** $x = \pm\sqrt{2}$ **i)** $x = \pm 1{,}3$ **j)** $x = \pm 0{,}2$
k) $x = \pm 1{,}2$ **l)** $x = 0$

K1/6

2 **a)** Die Funktionsgleichung $y = x^2 + 5$ beschreibt eine nach oben geöffnete und um 5 Einheiten auf der y-Achse nach oben verschobene Normalparabel. Da der Scheitelpunkt $(0|5)$ der tiefste Punkt der Parabel ist, kann diese keinen Schnittpunkt mit der Geraden $y = 4$ haben.
b) Die Parabel mit der Funktionsgleichung $y = 25x^2$ ist um den Faktor $a = 25$ gestreckt und verläuft durch den Ursprung. Da sie symmetrisch zur y-Achse und nach oben geöffnet ist, nimmt sie den Wert $y = 4$ bei zwei verschiedenen x-Werten an.
c) Die Funktionsgleichung $y = 16x^2$ beschreibt eine gestreckte Parabel, die ihren Scheitelpunkt im Ursprung hat. Sie hat deshalb genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse.
d) Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestreckt. Der Scheitelpunkt der Parabel ist im Ursprung, sodass die einzige Nullstelle bei $x = 0$ liegt.

K5

3 **a)** $L = \{-2; 2\}$ **b)** $L = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ **c)** $L = \{-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\}$ **d)** $L = \{-1{,}5; 1{,}5\}$
e) $L = \{0\}$ **f)** $L = \{\,\}$ **g)** $L = \{-4; 4\}$ **h)** $L = \{\,\}$

K1/6

4 Dies ist nicht wahr. Zum Beispiel hat die quadratische Gleichung $x^2 = -5$ keine Lösung, die quadratische Gleichung $x^2 = 0$ hat genau eine Lösung $(x = 0)$.

K6/5 **5** **a)** $x^2 + 9 = 0 \quad | -9$
$x^2 = -9$
$L = \{\,\}$

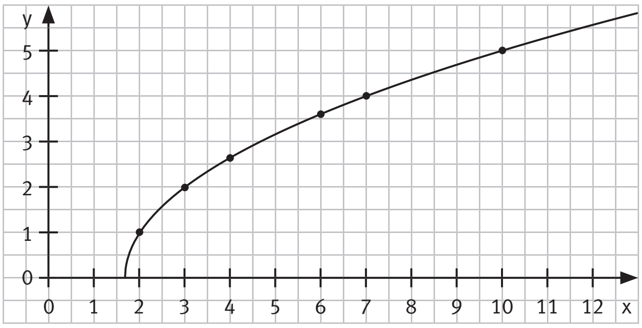
b) $4 - x^2 = 29 \quad | -4$
$-x^2 = 25 \quad | \cdot (-1)$
$x^2 = -25$
$L = \{\,\}$

K6/4 **6** **a)** Wurzeln sind nur dann definiert, wenn der Wert unter der Wurzel (der Radikand) ≥ 0 ist. Der Termwert von $3x - 5$ ist für $x = 0$ und $x = 1$ in beiden Fällen negativ, weshalb die Wurzel nicht definiert ist.

b)

x	2	3	4	6	7	10
$\sqrt{3x-5}$	1	2	2,6	3,6	4	5

c)



Der Graph hat eine Nullstelle bei $x = \frac{3}{5}$ und verläuft streng monoton steigend. Für alle x-Werte $< \frac{3}{5}$ ist die Funktion nicht definiert, es existiert in diesem Bereich auch kein Graph.

K3/5 **7** **a)** $0{,}5625\,\text{ha} = 5625\,\text{m}^2 = a^2$
$a = 75\,\text{m}$

b) $6272\,\text{m}^2 = 2b \cdot b$
$b = 56\,\text{m}; a = 112\,\text{m}$

K3/5 **8** Da eine Palette mit 288 Fliesen genau für $25{,}92\,\text{m}^2$ reicht, hat eine Fliese einen Flächeninhalt von $A = \frac{25{,}92\,\text{m}^2}{288} = 0{,}09\,\text{m}^2 = 900\,\text{cm}^2$. Außerdem ist eine Fliese quadratisch und es gilt für ihre Länge l:
$900\,\text{cm}^2 = l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{900\,\text{cm}^2} = 30\,\text{cm}$.
Die Seitenlänge einer Fliese beträgt 30 cm.

K 1/4 **1** Lösungsmöglichkeiten:

- Der Taschenrechner liefert ein auf neun Stellen gerundetes Ergebnis. Die neunte Nachkommastelle der Zahl auf dem Taschenrechner ist eine 8. Multipliziert man die Zahl mit sich selbst, steht wegen $8^2 = 64$ auf der 18. Nachkommastelle eine 4.
- Die Zahl $\sqrt{3}$ ist irrational, besitzt also eine nicht abbrechende und nicht periodische Dezimaldarstellung. Deshalb entspricht auch jede vermeintlich noch so genaue Dezimaldarstellung von $\sqrt{3}$ nicht der eigentlichen Zahl und ist deshalb nicht exakt.

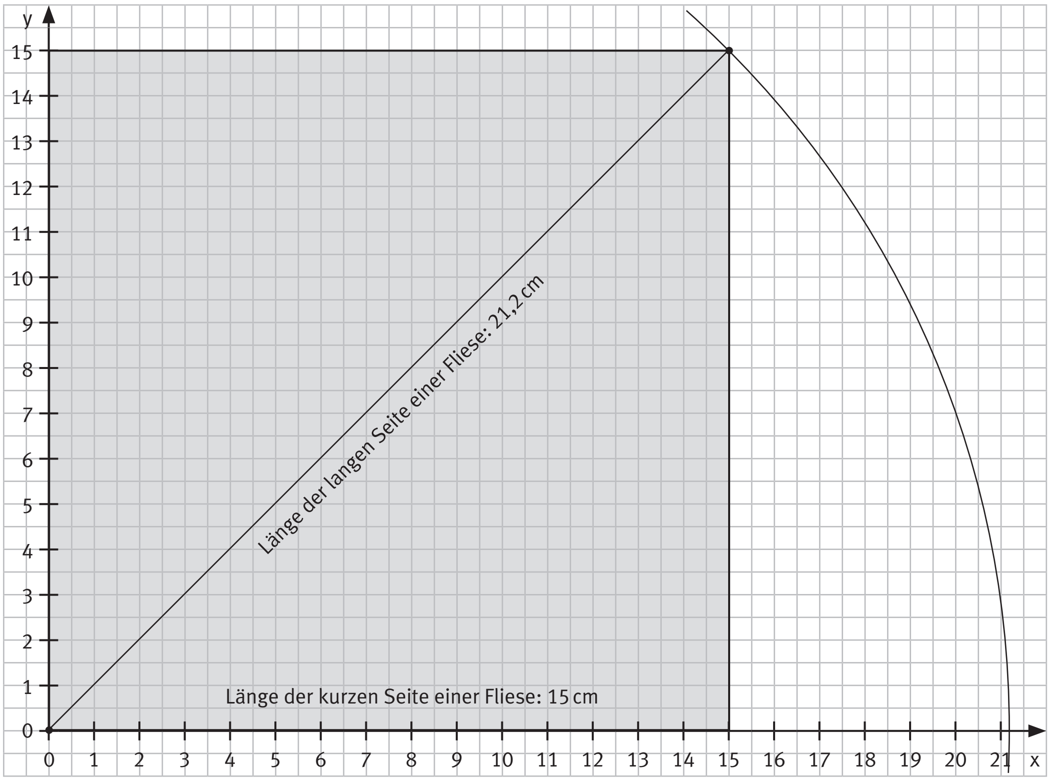
K 1/6 **2**

a) irrational	**b)** irrational	**c)** irrational	**d)** rational
e) rational	**f)** irrational	**g)** rational	**h)** rational
i) rational	**j)** irrational	**k)** irrational	**l)** irrational

K 1/5 **3**

a) $6 < \sqrt{40} < 7$	**b)** $4 < \sqrt{18} < 5$	**c)** $17 < \sqrt{316} < 18$
d) $9 < \sqrt{88} < 10$	**e)** $10 < \sqrt{112} < 11$	**f)** $18 < \sqrt{360} < 19$
g) $3 < \sqrt{10} < 4$	**h)** $5 < \sqrt{32} < 6$	**i)** $12 < \sqrt{145} < 13$
j) $8 < \sqrt{77} < 9$	**k)** $13 < \sqrt{170} < 14$	**l)** $20 < \sqrt{420} < 21$

K 4/5 **4** **a)** Die Fliesen sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, deren kurze Seiten 60 cm : 4 = 15 cm lang sind. Um die Länge der langen Seite zeichnerisch zu bestimmen, zeichnet man ein Quadrat der Seitenlänge 15 cm und misst die Länge der Diagonalen: ≈ 21,2 cm.



b) Die gesamte, von den Fliesen bedeckte Fläche ist $60\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} = 1800\,\text{cm}^2$ groß. Ein rotes Quadrat bedeckt genau ein Viertel dieser Fläche, also $450\,\text{cm}^2$. Die Seitenlänge dieses Quadrats und damit die lange Seite einer Fliese ist also: $\sqrt{450}\,\text{cm} \approx 21{,}2\,\text{cm}$.

K1/6 **5** **a)** Die Aussage ist wahr, denn $\left(\sqrt{16}\right)^2 = 16$, nach Definition der Quadratwurzel.

b) Die Aussage ist falsch, denn die Quadratwurzel aus einer nichtnegativen Zahl ist – nach Definition der Quadratwurzel – eine nichtnegative Zahl. Es gilt: $\sqrt{81} = +9$.

c) Die Aussage ist falsch, denn $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$ und $5 < 6$.

d) Die Aussage ist wahr. Für a und $b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:
$a = \sqrt{a}^{\,2}$ und $a + b = \sqrt{a+b}^{\,2} = \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$
Vergrößert sich a um den Wert b, dann vergrößert sich der Radikand a^2 um $2ab + b^2$.
Da a und $b \in \mathbb{R}_0^+$ sind, ist der Term $2ab + b^2$ positiv und die Wurzel wird auch größer.

e) Die Aussage ist wahr, da die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen sind.

f) Die Aussage ist wahr.
Beispiele für irrationale Zahlen zwischen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind: $\sqrt{2{,}1}$; $\sqrt{2{,}01}$; $\sqrt{2{,}001}$; $\sqrt{2{,}0001}$; ...
Beispiele für rationale Zahlen zwischen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind: 1,5; 1,51; 1,501; 1,5001; ...
Beispiele für reelle Zahlen zwischen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind sowohl die Beispiele für irrationale Zahlen als auch die Beispiele für rationale Zahlen: $\sqrt{2{,}1}$; $\sqrt{2{,}01}$; $\sqrt{2{,}001}$; ... und 1,5; 1,51; 1,501; ...

K5/1 **6** **a)** $\sqrt{401} \approx 20{,}025$ Abweichung: 0,025 **b)** $\sqrt{626} \approx 25{,}020$ Abweichung: 0,020
c) $\sqrt{10\,001} \approx 100{,}0050$ Abweichung: 0,0050 **d)** $\sqrt{250\,001} \approx 500{,}001$ Abweichung: 0,001

K1/4 **7** **a)** Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 9 (FE) hat die Seitenlänge $\sqrt{9}$ (LE) = 3 (LE), ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 16 (FE) hat entsprechend die Seitenlänge $\sqrt{16}$ (LE) = 4 (LE). Beide Quadrate zusammen haben den Flächeninhalt 25 (FE). Zeichnet man jedoch ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 25 (FE), so hat es die Seitenlänge $\sqrt{9+16}$ (LE) = $\sqrt{25}$ (LE) = 5 (LE). Obwohl die Flächeninhalte jeweils gleich sind, gilt dieses nicht für die Summe der Seitenlängen, sodass eine entsprechende Additionsregel für Wurzeln nicht gilt.

b) Es sind individuelle Lösungen möglich, die jedoch nicht immer zu natürlichen Zahlen führen, z. B. $\sqrt{16} + \sqrt{25} \neq \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$.

KX **8** **a)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$ **c)** $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}} = \sqrt{3}$ **d)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2{,}5} = \sqrt{20}$
e) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{1}} = \sqrt{30}$ **f)** $\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$ **g)** $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$ **h)** $\sqrt{12} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{576}$
i) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{36} = 18$ **j)** $\sqrt{336} : \sqrt{21} = 4$ **k)** $\sqrt{121} \cdot \sqrt{0} = 0$ **l)** $\sqrt{169} : \sqrt{13} = \sqrt{13}$

K5 **9** **a)** $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ **b)** $3 \cdot \left(\sqrt{8}\right)^2 = 24$ **c)** $1{,}5 \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 = 9$ **d)** $\left(0{,}5 \cdot \sqrt{10}\right)^2 = 2{,}5$ **e)** $\frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{12^2}\right) = 8$

K5 **10** **a)** $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{250} = 5\sqrt{10}$
c) $\sqrt{49x^5} = 7x^2\sqrt{x}$ **d)** $\sqrt{275} - \sqrt{99} = 5\sqrt{11} - 3\sqrt{11} = 2\sqrt{11}$
e) $\sqrt{288x^3y} = 12x\sqrt{2xy}$ **f)** $\sqrt{10a^3 + 22a^3} = \sqrt{32a^3} = 4a\sqrt{2a}$
g) $\frac{\sqrt{45} + \sqrt{80}}{\sqrt{147}} = \frac{3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{7\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$ **h)** $\frac{\sqrt{363a^2b^7c^9}}{ab^2c} = \frac{11ab^3c^4\sqrt{3bc}}{ab^2c} = 11bc^3\sqrt{3bc}$

K5 **11**
$\boxed{\sqrt{100+44}} = \boxed{12}$ $\boxed{\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{8}}$
$\boxed{2^2 \cdot \sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{32}}$ $\boxed{2^2} = \boxed{\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}}$
Übrig bleibt:
$\boxed{\sqrt{100} + \sqrt{44}}$

K5 **12** **a)** 3; 10; 0,1; 0,5; 10^3; 0,13; 1,8 **b)** 3; 5; 0,1; 0,5; 10; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **c)** 4; 6; 6; 10; 0,4

K5 **13** **a)** $0{,}45 < \sqrt{\frac{48}{147}} < \sqrt{\frac{121}{324}} < \sqrt{1{,}2}$ **b)** $-\sqrt{2{,}45} < -\sqrt{2{,}25} < -\sqrt{2} < -\sqrt{\frac{3}{7}}$

c) $0{,}\overline{3} < \sqrt{\frac{3}{7}} < \sqrt{1{,}1} < \sqrt{45{,}3}$ **d)** $\sqrt{\frac{162}{128}} < \sqrt{\frac{64}{49}} < \sqrt{1{,}3225} < \sqrt{1{,}4} < \frac{6}{5}$

K5 **14** **a)** $L = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ **b)** $L = \{-6; 6\}$ **c)** $L = \varnothing$ **d)** $L = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

e) $L = \{-\sqrt{0{,}5}; \sqrt{0{,}5}\}$ **f)** $L = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$ **g)** $L = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ **h)** $L = \{-2 \cdot \sqrt{3}; 2 \cdot \sqrt{3}\}$

K4/2 **15** Die Einheiten sind in der Rechnung nicht aufgeführt.

a) $a^2 = (3 + 1)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 6 = 10$; $a = \sqrt{10}$

b) $a^2 = 24$; $a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

c) $a^2 = (3 + 1)^2 - 8 \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 4 \cdot 3 = 4$; $a = 2$

K5 **16** **a)** $\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{36 + 36} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{36} = 6\sqrt{2}$ Passt nicht, da das Ergebnis keine ganze, sondern eine irrationale Zahl ist.

$36\sqrt{36} = 216$

$\sqrt{36} - \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = 0$

$\sqrt{36} + \sqrt{72} : \sqrt{2} = 6 + 6 = 12$

b) $\sqrt{\frac{64}{4}} = 4$

$\frac{\sqrt{64} + \sqrt{16} + \sqrt{4}}{\sqrt{64} - \sqrt{4} : 2} = \frac{8 + 4 + 2}{8 - 1} = \frac{14}{7} = 2$

$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16} + \sqrt{16}} = \frac{8}{4 + 4} = 1$

$\sqrt{64} - \sqrt{8} + \sqrt{4} : \sqrt{2} = 8 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 8 - \sqrt{2}$ Passt nicht, da das Ergebnis keine ganze, sondern eine irrationale Zahl ist.

$\sqrt{128} : \sqrt{8} = 8\sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 4$

3.6 Das kann ich!

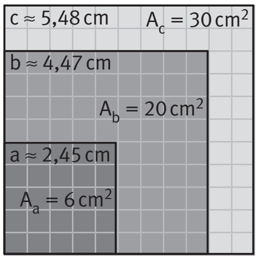
Aufgaben zur Einzelarbeit

K 5 **1** **a)** 5; 9; 11; 12; 25; 100 **b)** 0,2; 0,4; $\frac{1}{2}$; 0,5; $\frac{6}{7}$; 0,03

K 5 **2** **a)** $\sqrt{3} \approx 1{,}73$; $\sqrt{5} \approx 2{,}24$; $\sqrt{6} \approx 2{,}45$; $\sqrt{10} \approx 3{,}16$; $\sqrt{50} \approx 7{,}07$; $\sqrt{80} \approx 8{,}94$; $\sqrt{111} \approx 10{,}54$; $\sqrt{300} \approx 17{,}32$

b) $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$; $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$; $\sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58$; $\sqrt{1{,}44} \approx 1{,}2$; $\sqrt{17{,}6} \approx 4{,}20$; $\sqrt{35{,}8} \approx 5{,}98$; $\sqrt{\frac{4}{8}} \approx 0{,}71$

K 4/5 **3**



a) $\sqrt{6}\,cm \approx 2{,}45\,cm$
b) $\sqrt{20}\,cm \approx 4{,}47\,cm$
c) $\sqrt{30}\,cm \approx 5{,}48\,cm$

K 5/6 **4** **a)**

① $\sqrt{4} = 2$ | $\sqrt{40} \approx 6{,}3246$
$\sqrt{400} = 20$ | $\sqrt{4000} \approx 63{,}246$
$\sqrt{40\,000} = 200$ | $\sqrt{400\,000} \approx 632{,}46$
$\sqrt{4\,000\,000} = 2000$ | $\sqrt{40\,000\,000} \approx 6324{,}6$

② $\sqrt{9} = 3$ | $\sqrt{90} \approx 9{,}4868$
$\sqrt{900} = 30$ | $\sqrt{9000} \approx 94{,}868$
$\sqrt{90\,000} = 300$ | $\sqrt{900\,000} \approx 948{,}68$
$\sqrt{9\,000\,000} = 3000$ | $\sqrt{90\,000\,000} \approx 9486{,}8$

b) Es sind individuelle Formulierungen möglich, z. B.: Multipliziert man eine beliebige natürliche Zahl mit 100, so ist die Wurzel daraus das Zehnfache der Wurzel der ursprünglichen Zahl.

K 5/3 **5**

A in cm²	a in cm	b in cm	c in cm
144	4,5	32	12
625	12,5	50	25
133	7	19	11,53
7	1,4	5	$\sqrt{7}$
150	13	11,54	12,25
462,25	10,75	43	21,5

K 1/6 **6** **a)** rational: $\sqrt{4}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{400}$ irrational: $\sqrt{6}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{104}$; $\sqrt{1000}$

b) rational: 0; 1; $\sqrt{0}$; $\sqrt{1}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\sqrt{\frac{1}{9}}$ irrational: $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{12}{7}}$

K 5 **7** **a)** 12 **b)** 15 **c)** 20 **d)** $\frac{2}{3}$ **e)** 1,2 **f)** $\frac{1}{3}0$

K 5 **8** **a)** $12ab\sqrt{a}$ **b)** $2\sqrt{2} \cdot \frac{a}{b}$ **c)** $\frac{y}{7}\sqrt{x}$ **d)** $\frac{1}{0{,}9xy^2}$ **e)** $\frac{b}{a}$

f) $\frac{m}{2n}$ **g)** $0{,}3\sqrt{a}$ **h)** $3x\sqrt{2y}$ **i)** $\frac{0{,}2}{b^2}$

K1/6 **9** **a)** Das ist falsch. Gegenbeispiel: $-2 < 1$, aber $(-2)^2 = 4 > 1 = 1^2$.

b) Das ist falsch, die Gleichung hat die beiden Lösungen $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$.

c) Das ist richtig, da $(2n)^2 = 4n^2$ und $2 \mid (4n^2)$.

K1/5 **10**

a	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
L = { …}	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10	±11

a	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441
L = { …}	±12	±13	±14	±15	±16	±17	±18	±19	±20	±21

a	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961
L = { …}	±22	±23	±24	±25	±26	±27	±28	±29	±30	±31

K5/4 **11**

(Gleichungen umgeformt)		$G = \mathbb{N}_0$	$G = \mathbb{Q}$	$G = \mathbb{R}$
a)	$x^2 = 196$	L = {14}	L = {–14; 14}	L = {–14; 14}
b)	$x^2 = 7{,}29$	$L = \varnothing$	L = {–2,7; 2,7}	L = {–2,7; 2,7}
c)	$x^2 = -169$	$L = \varnothing$	$L = \varnothing$	$L = \varnothing$
d)	$x^2 = 25$	L = {25}	L = {–25; 25}	L = {–25; 25}
e)	$x^2 = 0{,}75$	$L = \varnothing$	$L = \varnothing$	$L = \{-\sqrt{0{,}75}; \sqrt{0{,}75}\}$

K5 **12** **a)** 1 $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{6}$ 2 $\sqrt{3} + \sqrt{8} = \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2}$ 3 $\sqrt{3} : \sqrt{8} = 0{,}5\sqrt{1{,}5}$

b) 1 $\sqrt{27} : \sqrt{18} = \sqrt{1{,}5}$ 2 $\sqrt{27} - \sqrt{18} = 3\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ 3 $\sqrt{27} \cdot \sqrt{18} = 9 \cdot \sqrt{6}$

c) 1 $\sqrt{99} - \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$ 2 $\sqrt{99} + \sqrt{11} = 4\sqrt{11}$ 3 $\sqrt{99} : \sqrt{11} = 3$

d) 1 $\sqrt{2{,}5} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot \sqrt{2{,}5}$ 2 $\sqrt{2{,}5} + \sqrt{4} = \sqrt{2{,}5} + 2$ 3 $\sqrt{2{,}5} - \sqrt{4} = \sqrt{2{,}5} - 2$

K5 **13** **a)** $4\sqrt{3}$ **b)** $4a\sqrt{6a}$ **c)** $8y\sqrt{5x}$ **d)** $10a^2bc\sqrt{10b}$

e) a^2 **f)** $5b$ **g)** $\frac{6}{a}$ **h)** $12xy$

K5 **14** **a)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{50}$ **b)** $\sqrt{49} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{196}$ **c)** $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100}$ oder $\sqrt{30} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{150}$

d) $\sqrt{432} : \sqrt{12} = 6$ **e)** $\frac{\sqrt{1083}}{\sqrt{3}} = 19$ **f)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{57{,}8} = 17$

KX **15** **a)** $\frac{3\sqrt{x}}{x}$ **b)** $\frac{2\sqrt{6y}}{y}$ **c)** $2a\sqrt{5b}$ **d)** $\frac{\sqrt{b}}{3}$ **e)** $-\frac{12\sqrt{6+y}}{6+y}$

f) $\frac{2\sqrt{42}}{7}$ **g)** $\frac{\sqrt{a} - a\sqrt{3}}{1 - 3a}$ **h)** $\frac{(2a + 2b) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(a - b)}$

Aufgaben für Lernpartner

K 1/6 **A** Das ist richtig.

K 1/6 **B** Das ist falsch. Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $5\,m^2$ hat die Seitenlänge $\sqrt{5}\,m \approx 2{,}24\,m$.

K 1/6 **C** Das ist richtig. Der Flächeninhalt beträgt jeweils $12\,cm^2$.

K 1/6 **D** Das ist falsch. Es gilt: $\sqrt{100} + \sqrt{49} = 10 + 7 = 17$ und $\sqrt{100 + 49} = \sqrt{149} \approx 12{,}21$.

K 1/6 **E** Das ist richtig.

K 1/6 **F** Das ist falsch. Keine irrationale Zahl lässt sich als Bruch darstellen.

K 1/6 **G** Das ist richtig.

K 1/6 **H** Das ist falsch. Gegenbeispiel: $\sqrt{4} = 2$.

K 1/6 **I** Das ist falsch. Die reellen Zahlen beinhalten die rationalen und die irrationalen Zahlen, sodass es auch reelle Zahlen gibt, die nicht rational sind.

K 1/6 **J** Das ist falsch. Gegenbeispiel: $-\sqrt{2}$ ist eine negative, irrationale Zahl.

K 1/6 **K** Das ist richtig.

Wurzeln

K1/6 **1** rational: $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ irrational: $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{63}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{1000}$

K5 **2** **a)** $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 14$

$\sqrt{36 + 64} = 10$

b) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{9 \cdot 25} = 15 = \sqrt{225}$

K6/1 **3** Frau Rettichs Aussage ist falsch, denn es gilt: $1 = 1^2 = \sqrt{1}$ und $0 = 0^2 = \sqrt{0}$.

K5/1 **4** $-\sqrt{144} < -\sqrt{4} < -\sqrt{\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{1}{4}} < \sqrt{4} < \sqrt{14} < \sqrt{41}$

K5 **5** **a)** $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2^3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

c) $\sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7}{\sqrt{25 \cdot 2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ **d)** $\sqrt{4^2 \cdot 11^3} = 4 \cdot \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{11} = 4 \cdot 11 \cdot \sqrt{11} = 44\sqrt{11}$

Einfache quadratische Gleichungen

K5 **6** **a)** $a = \pm\sqrt{400}$; $L = \{\pm 20\}$ **b)** $b = \pm\sqrt{225}$; $L = \{\pm 15\}$ **c)** $c = \pm\sqrt{\frac{81}{169}}$; $L = \left\{\pm\frac{9}{13}\right\}$

d) $d = \pm\sqrt{\frac{2}{9}}$; $L = \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$ **e)** $e = \pm\sqrt{16}$; $L = \{\pm 4\}$ **f)** $f^2 = 1$; $L = \{\pm 1\}$

K5/3 **7** Lösungsmöglichkeiten:

a) $a^2 = 4$ **b)** $a^2 = 324$ **c)** $a^2 = 0$

d) $a^2 = \frac{16}{25}$ **e)** $a^2 = 2{,}25$ **f)** $a^2 = 5$

g) $a^2 = 0{,}09$ **h)** $a^2 = 12$ **i)** $a^2 = \frac{1}{49}$

j) $a^2 = -1$

K5/3 **8** Es gilt $A = a^2$.

a) $a = \sqrt{361\,cm^2} = 19\,cm$ **b)** $a = \sqrt{10\,000\,km^2} = 100\,km$

c) $a = \sqrt{2{,}25\,mm^2} = 1{,}5\,mm$ **d)** $a = \sqrt{100\,a} = \sqrt{10\,000\,m^2} = 100\,m$

K3/5 **9** Flächeninhalt einer Platte: $\frac{0{,}9\,m^2}{10} = 0{,}09\,m^2$

Seitenlänge: $\sqrt{0{,}09\,m^2} = 0{,}3\,m$

K4/5 **10** Gesamte Fläche: $128\,m^2 + 64\,m^2 = 192\,m^2$

Seitenlänge: $\sqrt{192\,m^2} = \sqrt{3 \cdot 64\,m^2} = 8\sqrt{3}\,m$