Mit Hilfe der Aufwärmrunde soll möglichst präzise ermittelt werden, welche Inhalte bei den Lernenden noch verfügbar sind, wo auf fundiertes Wissen aufgebaut werden kann und was evtl. einer nochmaligen Grundlegung bedarf. Um eine gewisse Trennschärfe in dieser Lernstandserhebung zu erreichen, sind die Aufgaben differenziert gehalten: linke Spalte eher leichte Aufgaben, rechte Spalte dann schwierigere. Zudem wird für jede Aufgabennummer die angestrebte Kompetenz benannt. So kann diese Seite ein wichtiger Anhaltspunkt sein, um Lernende möglichst angemessen zu fördern.
Smileys sollen dazu anregen, eigene Fähigkeiten und Fertigkeiten allmählich selbst einzuschätzen. Eine aussagekräftige Analyse der Lernvoraussetzungen erhält die Lehrkraft, wenn sie die Ergebnisse mit dem Auswertungsbogen erfasst.

Diese Auswertung kann handschriftlich (K 3) bzw. bei click & teach auch in digitaler Form erfolgen.

L

1 Anteile unterschiedlich angeben

a) Ⓐ $\frac{27}{100} = 0{,}27 = 27\ \%$
Ⓑ $\frac{102}{100} = 1{,}02 = 102\ \%$
Ⓒ $\frac{13}{25} = \frac{52}{100} = 0{,}52 = 52\ \%$

b) Ⓐ $60\ \% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 0{,}6$
Ⓑ $2\ \% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0{,}02$
Ⓒ $120\ \% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

2 Preiserhöhung und Preissenkung berechnen

a) Neuer Preis:
$P = G \cdot p$
$= 2\,355 \cdot 0{,}97$
$= 2\,284{,}35$ (€)

b) Alter Preis:
$G = \frac{P}{p}$
$= \frac{35\,870}{1{,}055}$
$= 34\,000$ (€)

3 Mit Monats- und Tageszinsen rechnen

a)

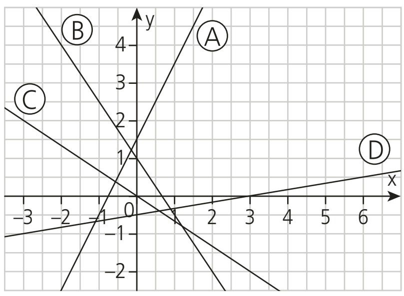
	Ⓐ	Ⓑ
Kapital (K)	12 300 €	4 000 €
Zinssatz (p)	1,2 %	0,75 %
Zeit (t)	81 Tage	5 Monate
Zinsen (Z)	33,21 €	12,50 €

b)

	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
K	35 000 €	13 600 €	18 000
p	2,2 %	0,8 %	0,9 %
t	36 Tage	3 Monate	200 Tage
Z	77 €	27,20 €	90 €

4 Lineare Funktionsgleichungen aufstellen und Graphen zeichnen

a) Ⓐ $y = 0{,}5x + 1$
Ⓑ $y = \frac{1}{3}x - 0{,}5$
Ⓒ $y = -2x + 2$
Ⓓ $y = -x - 1$

b)


5 Mit Zehnerpotenzen rechnen

a) Ⓐ $8 \cdot 10^4 \cdot 3\,700 = 2{,}96 \cdot 10^8$
Ⓑ $2{,}002 \cdot 10^{-4} : 3{,}08 = 6{,}5 \cdot 10^{-5}$

b) Ⓐ $0{,}16 \cdot 10^{-5} : 4^2 = 1 \cdot 10^{-7}$
Ⓑ $\sqrt{169} \cdot 10^6 \cdot 0{,}045 = 5{,}85 \cdot 10^5$

6 Mit Potenzen rechnen

a) Ⓐ $4^4 = 256$
Ⓑ $7^3 = 343$
Ⓒ $6{,}2^5 \approx 9\,161$

b) Ⓐ $3^2 \cdot 3^5 = 3^7 = 2\,187$
Ⓑ $8^6 : 8^3 = 8^3 = 512$
Ⓒ $(2^3)^4 = 2^{12} = 4\,096$

Z

K 3

Auswertungsbogen zur Aufwärmrunde „Exponentialfunktion"

Einsatzhinweis:
Siehe Erläuterung Lösungsband Seite 5

2 Exponentialfunktion

Kompetenzerwartungen und Inhalte

M10 Lernbereich: Exponentialfunktion

Die Schülerinnen und Schüler …

- übersetzen Realsituationen mit exponentiellem Wachstum (Zu- und Abnahmeprozesse, z.B. Zinseszins, Bevölkerungsentwicklung, radioaktiver Zerfall) in mathematische Modelle (Tabellen, Graphen, Terme) und geben umgekehrt zu mathematischen Modellen eine passende Realsituation an, um exponentielles Wachstum deutlich von linearem Wachstum abzugrenzen sowie charakterisierende Eigenschaften (z.B. Geschwindigkeit des Wachstums) zu identifizieren.
- verwenden die Potenz-, Wurzel- und Logarithmusgesetze beim Umgang mit Wachstumsprozessen, die sie ggf. auch computergestützt darstellen. Dabei ermitteln sie Anfangs- und Endwerte, Wachstumsfaktoren und -raten sowie die Dauer des Wachstums und überprüfen die Ergebnisse auf Plausibilität.

Jedes neue Kapitel beginnt mit einer Bildaufgabe. Bildliche Darstellungen sind eher offen und engen weniger als textliche Vorgaben ein. So bieten sie die Möglichkeit, verschiedene Aspekte zu sehen, herauszugreifen und zu durchdenken. Vorgegebene Fragen bzw. Aufgaben zeigen dazu einen Weg auf. Mögliche eigene Fragestellungen der Lernenden können Inhalte weiter durchdringen und lassen zudem erkennen, inwieweit Lernende mit solch offenen Situationen umzugehen vermögen.

Einstieg

- **Der König hielt den Wunsch für sehr bescheiden. Wie schätzt du den Wunsch ein?**
  Individuelle Einschätzungen der Lernenden
- **Die Anzahl der Reiskörner auf jedem beliebigen Feld kann man mithilfe einer Potenz darstellen. Besprecht euch in der Gruppe.**
  Mögliches Ergebnis:
  Die Anzahl der Reiskörner kann man mit der Potenz 2^x darstellen, da sich die Anzahl auf jedem folgenden Feld verdoppelt.
  Beispiel: 1. Feld: $2^0 = 1$ (Reiskorn)
  2. Feld: $2^1 = 2$ (Reiskörner)
  3. Feld: $2^2 = 4$ (Reiskörner) usw.
- **Der Hofmathematiker errechnete insgesamt $2^{64} – 1$, also 18 446 744 073 709 551 615 Reiskörner. Berechne das Gewicht des gesamten Reises in Kilogramm (Tonnen) und notiere als Zehnerpotenz. Recherchiere dafür benötigte Werte im Internet. Konnte der König diese Reismenge beschaffen? Was meinst du?**
  Internetrecherche:
  Anzahl Reiskörner pro Kilogramm: ca. 54 500
  Gewicht aller Reiskörner mit gerundeten Zahlen:
  $1{,}8447 \cdot 10^{19} : 54\,500 = 3{,}385 \cdot 10^{14}$ (kg) $= 3{,}385 \cdot 10^{11}$ (t)
  Meinung der Lernenden: Der König konnte diese Reismenge unmöglich beschaffen.
- **Die Menge der weltweiten Reisernte betrug im Erntejahr 2020/2021 rund 500 Millionen Tonnen Reis. Berechne, wie viele weltweite Jahresernten der Erfinder des Schachspiels bekommen hätte.**
  Anzahl der weltweiten Reisernten in Bezug auf das Erntejahr 2020/2021:
  $3{,}385 \cdot 10^{11} : (5 \cdot 10^8) = 677$ (weltweite Reisernten)

Ausblick

Hier werden kurz und kompetenzorientiert die Inhalte des nachfolgenden Kapitels aufgezeigt. Die Lernenden erhalten so bereits einen ersten Überblick über das, was sie auf den nächsten Seiten lernen.

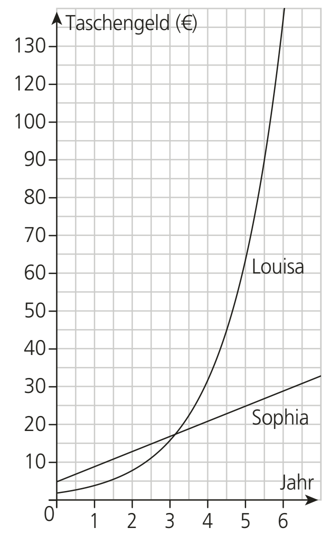
L

Ausgehend von einem anschaulichen Rechenbeispiel werden das lineare und das exponentielle Wachstum miteinander verglichen. Den Lernenden soll dabei klar werden, dass eine Vervielfachung des Ausgangswertes im Gegensatz zu einer konstanten linearen Zunahme letztlich eine wesentlich höhere Wertsteigerung zur Folge hat. Grafisch wird das auch durch die Darstellung im Koordinatensystem veranschaulicht.

1 a)

	Sophia	Louisa
Jetzt	5 €	2 €
nach 1 Jahr	9 €	4 €
nach 2 Jahren	13 €	8 €
nach 3 Jahren	17 €	16 €
nach 4 Jahren	21 €	32 €
nach 5 Jahren	25 €	64 €
nach 6 Jahren	29 €	128 €

b)



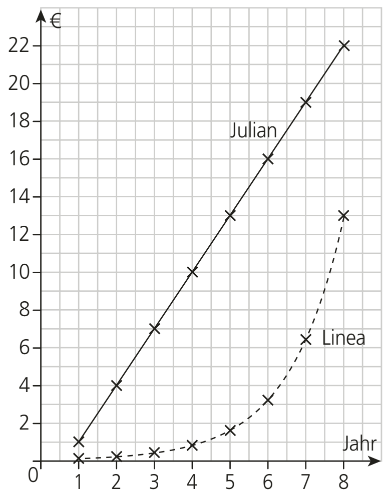
2 a) Erläuterung gemäß Abbildung:

	Sophia:	Louisa:
Ausgangswert	5 €	2 €
Wachstum	pro Jahr 4 € mehr	Verdoppelung
Zeitintervall	jeweils ein Jahr	jeweils 1 Jahr

b) Ⓐ

Rasenmähen	1	2	3	4	5	6	7	8
Julian	1 €	4 €	7 €	10 €	13 €	16 €	19 €	22 €
Linea	0,10 €	0,20 €	0,40 €	0,80 €	1,60 €	3,20 €	6,40 €	12,80 €

Ⓑ



Ⓒ

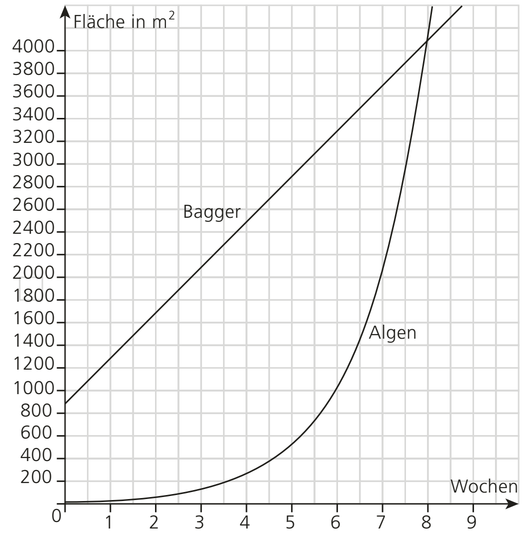
	Funktionsgleichung	10-mal	20-mal	25-mal
Julian	$y = 3x - 2$	28 €	58 €	73 €
Linea	$y = 0{,}1 \cdot 2^x$	51,20 €	52 428,80 €	1 677 721,60 €

3 a) Lineares Wachstum: In jeweils gleichen Abständen kommt immer die gleiche Menge (der gleiche Betrag) dazu. Das ist bei Ⓐ, Ⓓ und Ⓕ der Fall.
Exponentielles Wachstum: In jeweils gleichen Abschnitten nimmt die Menge (der gleiche Betrag) immer um denselben Faktor zu. Das ist bei Ⓑ, Ⓒ, und Ⓔ der Fall.

b)

lineares Wachstum	Ⓐ $y = 0{,}5x + 1$	Ⓓ $y = 2x + 1$	Ⓕ $y = x + t$
Exponentielles Wachstum	Ⓑ $y = 0{,}5 \cdot 2^x$	Ⓒ $y = 2 \cdot 2^x$	Ⓔ $y = n \cdot 1{,}2^x$

4 a)



b)

	Bagger	Algen
Funktionsgleichung	$y = 400 \cdot x + 896$	$y = 16 \cdot 2^x$
nach 5 Wochen	2 896 m²	512 m²
nach 8 Wochen	4 096 m²	4 096 m²
nach 10 Wochen	4 896 m²	(16 384 m²)

Bei der grafischen Darstellung kann man aufgrund der begrenzten Skalierung nicht die exakten Werte ablesen, wie sie die rechnerische Lösung liefert.

5 a) Funktionsgleichung: $y = 60\,000 \cdot 1{,}03^x$

b) Waldbestand in 5 Jahren:
$y = 60\,000 \cdot 1{,}03^5$
$y \approx 69\,556$ (Festmeter)

6 Anzahl Kaninchen nach 12 Jahren:
$y = 30 \cdot 1{,}13^x$
$y = 30 \cdot 1{,}13^{12}$
$y \approx 130$ (Kaninchen)

7 a) Funktionsgleichung: $y = 1\,800 \cdot 1{,}15^x$

b)A nzahl Bakterien nach 10 Stunden:
$y = 1\,800 \cdot 1{,}15^{10}$
$y \approx 7\,282$ (Bakterien)

c) Beobachtungszeitraum:
Stunden von 8 Uhr bis 12 Uhr am nächsten Tag: 28 h
Anzahl Bakterien um 12 Uhr am nächsten Tag: $y = 1\,800 \cdot 1{,}15^{28}$
$y \approx 90\,118$ (Bakterien)

8 a)

Zeit (h)	0	1	2	3	4
Anzahl (Zellen)	30	120	480	1 920	7 680

b) $y = 30 \cdot 4^x$

9 Da sich die Seerosen pro Zeiteinheit verdoppeln, ist der See nach 49 Zeiteinheiten zur Hälfte mit Seerosen bedeckt.

Mit Kapitalwachstum über mehrere Jahre rechnen

An Beispielen des Kapitalwachstums lässt sich sehr anschaulich die Wirkung von Zinseszinsen verdeutlichen. Anstatt für jedes Jahr die Zinsen zu berechnen, dem Kapitalzuzuschlagen und erneut die Zinsen für das folgende Jahr daraus zu ermitteln, wird eingeübt, das Endkapital nach x Jahren in einem Schritt zu bestimmen (Zinseszinsformel).

Schwierigkeiten haben die Lernenden oft bei der Berechnung des Zinssatzes p über den Wachstumsfaktor q bei bekanntem Anfangs- und Endkapital und bekannter Zeit. Hier sind mehrere Beispielrechnungen mit Erläuterungen angebracht.

L

1 a) Erklärung gemäß Abbildung, z. B.:
Das Anfangskapital wird sechsmal mit dem Zinsfaktor 1,015 multipliziert. Dabei werden die Zwischenergebnisse für jedes Jahr notiert.

Kapitel nach 1 Jahr: 2 000,00 · 1,015 = 2 030,00 (€)
Kapital nach 2 Jahren: 2 030,00 · 1,015 = 2060,45 (€)
Kapital nach 3 Jahren: 2 060,45 · 1,015 = 2 091,36 (€)
Kapital nach 4 Jahren: 2 091,36 · 1,015 = 2 122,73 (€)
Kapital nach 5 Jahren: 2 122,73 · 1,015 = 2 154,57 (€)
Kapital nach 6 Jahren: 2 154,57 · 1,015 = 2 186,89 (€)

b) Beim kurzen Weg werden die Faktoren zur Potenz $1{,}015^6$ zusammengefasst:
$2\,000 \cdot 1{,}015^6 = 2\,186{,}89$ (€)

2

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
p	15 %	8 %	3,2 %	5,04 %	0,9 %	0,85 %
q	1,15	1,08	1,032	1,0504	1,009	1,0085

3 Formel zur Berechnung des Endkapitals:
$K_n = K_0 \cdot q^n$

a) $q = 1 + 0{,}009 = 1{,}009$
$K_n = 4\,000 \cdot 1{,}009^3$
$\approx 4\,108{,}97$ (€)

b) $q = 1 + 0{,}0105 = 1{,}0105$
$K_n = 5\,800 \cdot 1{,}0105^4$
$\approx 6\,047{,}46$ (€)

c) $q = 1 + 0{,}011 = 1{,}011$
$K_n = 12\,000 \cdot 1{,}011^2$
$\approx 12\,265{,}45$ (€)

d) $q = 1 + 0{,}0115$
$K_n = 10\,000 \cdot 1{,}0115^8$
$\approx 10\,957{,}89$ (€)

e) $q = 1 + 0{,}0095 = 1{,}0095$
$K_n = 5\,000 \cdot 1{,}0095^5$
$\approx 5\,242{,}06$ (€)

f) $q = 1 + 0{,}012 = 1{,}012$
$K_n = 20\,000 \cdot 1{,}012^6$
$\approx 21\,483{,}90$ (€)

4 a) Ⓐ Endkapital (K_n): 14 897,15 €
Zinssatz (p): 1,25 %
Anzahl Jahre (n): 5

Ⓑ Anfangskapital (K_0): 4 000 €
Anzahl Jahre (n): 5
Endkapital (K_n): 4 202,04 €

Ⓒ Anfangskapital (K_0): 15 000 €
Zinssatz (p): 1,3 %
Endkapital (K_n): 16 632,86 (€)

b) Ⓐ
$K_n = K_0 \cdot q^n$
$14\,897{,}15 = K_0 \cdot 1{,}0125^5$
$14\,897{,}15 = K_0 \cdot 1{,}064082 \quad | : 1{,}064082$
$14\,000 = K_0$
Es wurden 14 000 € angelegt.

Ⓑ
$K_n = K_0 \cdot q^n$
$4\,202{,}04 = 4\,000 \cdot q^5 \quad | : 4\,000$
$1{,}05051 = q^5 \quad | \sqrt[5]{\ }$
$1{,}0099 = q$
$p = 1{,}0099 - 1 = 0{,}99\%$
Der Zinssatz betrug 0,99%.

Ⓒ
$K_n = K_0 \cdot q^n$
$16\,632{,}86 = 15\,000 \cdot 1{,}013^n \quad | : 15\,000$
$1{,}109 = 1{,}013^n \quad | \log$
$\frac{\log 1{,}109}{\log 1{,}013} = n$
$8 = n$
Der Betrag wurde 8 Jahre angelegt.

5 a) Tanja formt die Formel $K_n = K_0 \cdot q^n$ nach der gesuchten Variablen q um und setzt dann erst die bekannten Größen ein.

$$K_n = K_0 \cdot q^n \qquad | : K_0$$
$$q^n = \frac{K_n}{K_0} \qquad | \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$
$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$
$$q = \sqrt[5]{\frac{4\,202{,}04}{4\,000}}$$
$$q = 1{,}0099$$
$$p = q - 1$$
$$= 1{,}0099 - 1$$
$$= 0{,}0099 = 0{,}99\ \%$$

b) Ⓐ
$$K_n = K_0 \cdot q^n \qquad | : q^n$$
$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$
$$K_0 = \frac{14\,897{,}15}{1{,}0125^5}$$
$$K_0 = 14\,000\ (€)$$

Ⓒ
$$K_n = K_0 \cdot q^n \qquad | : K_0$$
$$q^n = \frac{K_n}{K_0}$$
$$n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log q}$$
$$n = \frac{\log \frac{16\,632{,}86}{15\,000}}{\log 1{,}013}$$
$$n = 8\ (\text{Jahre})$$

Die Ergebnisse sind identisch.

6 a)
$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$q = 1 + 0{,}0125 = 1{,}0125$$
$$9\,226{,}41 = K_0 \cdot 1{,}0125^2 \qquad | : 1{,}0125^2$$
$$9\,000\ (€) = K_0$$

b)
$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$q = 1 + 0{,}013 = 1{,}013$$
$$K_n = 7\,500 \cdot 1{,}013^5$$
$$= 8\,000{,}34\ (€)$$

c)
$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$q = 1 + 0{,}0155 = 1{,}0155$$
$$11\,662{,}70 = 10\,000 \cdot 1{,}0155^n \qquad | : 10\,000$$
$$1{,}16627 = 1{,}0155^n$$
$$\frac{\log 1{,}166287}{\log 1{,}0155} = n$$
$$10\ (\text{Jahre}) = n$$

d)
$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$19\,258{,}58 = 15\,000 \cdot q^{15} \qquad | : 15\,000$$
$$1{,}2839 = q^{15} \qquad | \sqrt[15]{\ }$$
$$1{,}0168 = q$$
$$p = 1{,}0168 - 1$$
$$= 0{,}0168 = 1{,}68\%$$

e)
$$K_n = K_0 \cdot q^n \qquad | : q^n$$
$$73\,149{,}56 = 50\,000 \cdot 1{,}0192^n \qquad | : 50\,000$$
$$1{,}463 = 1{,}0192^n$$
$$\frac{\log 1{,}463}{\log 1{,}0192} = n$$
$$20\ (\text{Jahre}) = n$$

7 Endkapital Anlage A:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$K_6 = 20\,000 \cdot 1{,}015^6$$
$$= 21\,868{,}87\ (€)$$

Endkapital Anlage B:

$$K_6 = 20\,000 \cdot 1{,}003 \cdot 1{,}006 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}028$$
$$= 21\,713{,}77\ (€)$$

8 a) Berechnung Zinsfaktor:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$9\,358{,}09 = 8\,650 \cdot q^6 \quad |:8\,650$$
$$1{,}08186 = q^6 \quad |\sqrt[6]{}$$
$$1{,}0132 = q$$

Berechnung Zinssatz:

$$p = q - 1$$
$$= 1{,}0132 - 1$$
$$= 0{,}0132 = 1{,}32\%$$

b) Berechnung Anlagezeitraum:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad |:q^n$$
$$5\,400 = 5\,000 \cdot 1{,}0155^n \quad |:5\,000$$
$$1{,}08 = 1{,}0155^n$$
$$\frac{\log 1{,}08}{\log 1{,}0155} = n$$
$$5\text{ (Jahre)} = n$$

9 a) Berechnung Zinsfaktor: Beispiel

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$5\,205{,}24 = 5\,135{,}91 \cdot q^1 \quad |:5\,135{,}91$$
$$1{,}0135 = q$$

Berechnung Zinssatz:

$$p = q - 1$$
$$= 1{,}0135 - 1$$
$$0{,}0135 = 1{,}35\%$$

b) Berechnung Anfangskapital: Beispiel

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$5\,418{,}92 = K_0 \cdot 1{,}0135^6 \quad |:1{,}0135^6$$
$$5\,000\ (€) = K_0$$

c) Berechnung Endkapital nach 12 Jahren:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$= 5\,000 \cdot 1{,}0135^{12}$$
$$= 5\,872{,}93\ (€)$$

10 a) Rendite für „Die beste Geldanlage!“

Berechnung Zinsfaktor:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$10\,000 = 5\,000 \cdot q^6 \quad |:5\,000$$
$$2 = q^6 \quad |\sqrt[6]{}$$
$$1{,}1225 \approx q$$

Berechnung Zinssatz (Rendite):

$$p = q - 1$$
$$= 1{,}1225 - 1$$
$$= 0{,}1225 = 12{,}25\%$$

Rendite für „Die Altersvorsorge für Sie!“

Berechnung Zinsfaktor:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$100\,000 = 10\,000 \cdot q^{45} \quad |:10\,000$$
$$10 = q^{45} \quad |\sqrt[45]{}$$
$$1{,}0525 = q$$

Berechnung Zinssatz (Rendite):

$$p = q - 1$$
$$= 1{,}0525 - 1$$
$$= 0{,}0525 = 5{,}25\ \%$$

Rendite für „Kapitalanlage“

Berechnung Zinsfaktor:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$30\,000 = 25\,000 \cdot q^6 \quad |:25\,000$$
$$1{,}2 = q^6 \quad |\sqrt[6]{}$$
$$1{,}0309 = q$$

Berechnung Zinssatz (Rendite):

$$p = q - 1$$
$$= 1{,}0309 - 1$$
$$= 0{,}0309 = 3{,}09\%$$

Rendite von „Die beste Geldanlage!“ scheint nicht realistisch zu sein, denn der Zinssatz ist viel zu hoch angesetzt. Die beiden anderen Anlagen sind in Ordnung, wobei bei Anlage „Die Altersvorsorge für Sie!“ eine sehr lange Laufzeit hat.

b) Lernende wählen eine Anlageform und begründen ihre Auswahl.

L

1 a) Christi Geburt bis 1650: Verdopplungszeitspanne: 1 650 Jahre
1650 – 1800: Verdopplungszeitspanne: 150 Jahre
1800 – 1927: Verdopplungszeitspanne: 127 Jahre
1927 – 1977: Verdopplungszeitspanne: 50 Jahre
Die Zeitspannen der Bevölkerungsverdopplung werden immer kürzer.

b) Berechnung Wachstumsfaktor:

$q = \frac{P}{G}$

$= \frac{6{,}2}{6{,}13}$

$\approx 1{,}0114$

Berechnung Wachstumsrate:

$p = q - 1$

$= 1{,}0114 - 1$

$= 0{,}0114 = 1{,}14\%$

c) Erläuterung gemäß Tabelle

2 a) Berechnung Weltbevölkerungszahl 2020 mit dem Wachstumsfaktor 1,012:

Jahr	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Bevölkerung in Mrd.	6,92	7,00	7,08	7,16	7,25	7,34	7,43	7,52	7,61	7,70	7,79

Mit dem verkürzten Rechenweg kann man die Weltbevölkerung 2020 direkt berechnen: $6{,}92 \cdot 1{,}012^{10} = 7{,}80$ (Mrd.), eine kleine Abweichung zu obigem Wert aufgrund der Rundungen.

b) Weltbevölkerungszahl:

2030: $7{,}79 \cdot 1{,}009^{10} = 8{,}52$ Mrd.

2040: $8{,}52 \cdot 1{,}007^{10} = 9{,}14$ (Mrd.)

2050: $9{,}14 \cdot 1{,}006^{10} = 9{,}70$ (Mrd.)

3 a) Erläuterung gemäß Abbildung

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$7{,}79 = 7{,}36 \cdot q^5 \quad | : 7{,}36$

$1{,}0584 = q^5 \quad | \sqrt[5]{}$

$1{,}0114 = q$

$p = q - 1$

$= 1{,}0114 - 1$

$= 0{,}0114 = 1{,}14\%$

b) Berechnung Wachstumsfaktor:

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$7{,}38 = 6{,}54 \cdot q^{15} \quad | : 6{,}54$

$1{,}1284 = q^{15} \quad | \sqrt[15]{}$

$1{,}0081 = q$

Berechnung Wachstumsrate:

$p = q - 1$

$= 1{,}0081 - 1$

$= 0{,}0081 = 0{,}81\%$

4 a) Berechnung Anfangswert (Einwohnerzahl 2016):

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$73\,650 = W_0 \cdot 1{,}014^5 \quad | : 1{,}014^5$

68 704 (Einwohner) $\approx W_0$

b) Berechnung Endwert (zu erwartende Einwohnerzahl 2031:

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$W_n = 73\,650 \cdot 1{,}011^{10}$

$W_n \approx 82\,165$ (Einwohner)

c) Berechnung Wachstumsfaktor von 2016 bis 2031:

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$82\,165 = 68\,704 \cdot q^{15} \quad | : 68\,704$

$1{,}1959 = q^{15} \quad | \sqrt[15]{}$

$1{,}012 = q$

Berechnung Wachstumsrate:

$p = q - 1 = 1{,}012 - 1$

$= 0{,}012 = 1{,}2\%$

An Beispielen des Bevölkerungswachstums werden die Begriffe Wachstumsrate p (Steigerung in Prozent pro Jahr) und der Wachstumsfaktor q (Dezimalzahl aus Grundwert + Wachstumsrate) eingeübt.
Beispiel:
Wachstumsfaktor 1,08 bedeutet eine Zunahme um 8% pro Jahr. Der Exponent des Wachstumsfaktors gibt weiterhin die Zahl der Zeitintervalle (hier meistens Jahre) an.

Mit Abnahmen bei der Bevölkerungsentwicklung rechnen

Die Lernenden haben bei Abnahmen häufig das Problem, zwischen den Abnahmen p in Prozent und dem Abnahmefaktor q zu unterscheiden.

Grundsatz:
Abnahmefaktor = Grundwert (100%) – Abnahme (z. B. 40%)

Beispiel:
$q = 1 – 0{,}4 = 0{,}6$
Besonderes Augenmerk ist wiederum auf die Berechnung der Abnahme p über den Faktor q zu legen. Die Formelumstellung bedarf gezielter Übung.

L

1 a) Beispiel:
Immer weniger Geburten (junge Menschen) stehen immer mehr ältere Menschen (höhere Lebenserwartung) gegenüber.
Vergleich Geburtenraten 1950 mit 2000:

Geburten 1950:	1,1 Mio.	Geburten 2000:	700 000
Geburten 2000:	700 000	zu erwartende Geburten 2050:	500 000

Berechnung Abnahmefaktor
$W_n = W_0 \cdot q^n$

b) Beispiele für gesellschaftliche Problem:
Rentensicherheit im Zusammenhang mit dem Generationenvertrag; zu wenig Fachkräfte

2 a) Erläuterung des Rechenwegs anhand der Darstellung:

Jahr	2016	2017	2018	2019	2020
Einwohnerzahl	17 407	16 885	16 378	15 887	15 410

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 17\,407 \cdot 0{,}97^4$
$\approx 15\,410$ (Einwohner)

b) Berechnung der Einwohnerzahl 2025:
$q = 1 – 0{,}025 = 0{,}975$
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 15\,410 \cdot 0{,}975^5$
$\approx 13\,578$ (Einwohner)

Berechnung der Einwohnerzahl 2030:
$q = 1 – 0{,}015 = 0{,}985$
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 13\,578 \cdot 0{,}985^5$
$\approx 12\,590$ (Einwohner)

3 a) Einwohnerzahl vor 8 Jahren:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$75\,631 = W_0 \cdot 0{,}97^8$
$75\,631 = W_0 \cdot 0{,}783743 \quad | : 0{,}783743$
$96\,500 \approx W_0$

b) Berechnung Abnahmefaktor:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$41\,580 = 46\,000 \cdot q^5 \quad | : 46\,000$
$0{,}9039 = q^5 \quad | 95$
$0{,}980 = q$
Berechnung durchschnittliche Abnahme pro Jahr:
$p = q – 1$
$= 0{,}980 – 1$
$= –0{,}02 = –2\%$ Abnahme pro Jahr: 2%

c) Berechnung Beobachtungszeitraum:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$200\,000 = 240\,000 \cdot 0{,}985^n \quad | : 240\,000$
$0{,}83333 = 0{,}985^n$
$\frac{\log 0{,}83333}{\log 0{,}985} = n$
12 (Jahre) $\approx n$

4 a) Berechnung Abnahmefaktor Arktis

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$4{,}6 = 7{,}6 \cdot q^{38}$ | : 7,6

$0{,}6053 = q^{38}$ | $\sqrt[38]{}$

$0{,}9869 \approx q$

Berechnung Abnahmefaktor Antarktis:

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$17{,}6 = 18{,}6 \cdot q^{38}$ | : 18,6

$0{,}9462 = q^{38}$ | $\sqrt[38]{}$

$0{,}9986 \approx q$

Berechnung jährliche prozentuale Abnahme

Arktis:

$p = q - 1$

$= 0{,}9869 - 1$

$= -0{,}0131$

Prozentuale Abnahme : 1,31%

Antarktis:

$p = q - 1$

$= 0{,}9986 - 1$

$= -0{,}0014$

Prozentuale Abnahme: 0,14%

b) Arktis: Bild mit Eisbären

Antarktis: Bild mit Pinguinen

Die Lebensräume, vor allem die Jagdreviere, werden durch die Eisschmelze immer kleiner, die Tiere müssen Hunger leiden, was direkte Folgen für ihre Fähigkeit zur Fortpflanzung hat.

Größen bei radioaktivem Zerfall berechnen

Einen Sonderfall innerhalb der Abnahmeprozesse stellt der radioaktive Zerfall dar. Der Abnahmefaktor ist stets 0,5, wenn mit dem Zeitintervall der Zerfallszeit des Stoffes (Halbwertszeit HWZ) gerechnet wird. Das ändert sich jedoch, wenn die Substanzmenge z. B. nach einem Bruchteil der HWZ oder gar die jährliche Abnahme in Prozent berechnet werden soll. Es ist deshalb empfehlenswert, zunächst nur in den Intervallen der jeweiligen Halbwertszeit zu rechnen.

Hinweise:
a) Berechnung eines Bruchteils der HWZ: Bruchteil bestimmen und als Exponent verwenden
b) Berechnung der jährlichen Abnahme p:
$q^{HWZ} = 0,5$
$q = \sqrt[HWZ]{0,5}$
$p = (1 - q)$

L

1 a)

Jahr	1986	2006	2026	2046	2066	2086	2106
Zerfall	1 024 g	512 g	256 g	128 g	64 g	32 g	16 g

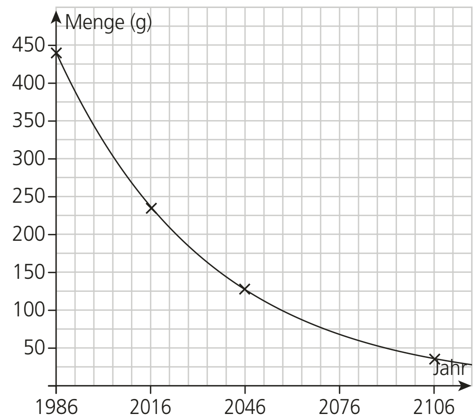
b) Erläuterung gemäß Abbildung
Berechnung: $1\,024 \cdot 0,6^6 = 16$ (g)

c) Anfangswert W_0: 1 024 g
Wachstumsfaktor q: 0,5
Beobachtungszeitraum n: 120 Jahre ≙ 6 Halbwertszeiten
Endwert W_n: 16 g

2 a) Berechnung Zeitspanne und Beobachtungszeiträume:
Halbwertszeit Cäsium-137: 30 Jahre
Zeitspanne: 120 Jahre
Beobachtungszeiträume: n = 120 : 30 = 4
Berechnung Endmenge:
$W_n = W_0 \cdot 0,5^n$
$= 440 \cdot 0,5^4$
$= 27,5$ (g)

b) Berechnung prozentueller Anteil von Anfangswert:
$p = \frac{P}{G}$
$= \frac{27,5}{440}$
$= 0,0625 = 6,25\ \%$

c)



3 a) Berechnung Zeitspanne und Beobachtungszeiträume:
Halbwertszeit Jod-131: 8 Tage
Zeitspanne: 30 Tage (60 Tage)
Beobachtungszeiträume: n = 30 : 8 = 3,75 | n = 60 : 8 = 7,5

Berechnung Endmenge nach 30 Tagen:
$W_n = W_0 \cdot 0,5^n$
$= 400 \cdot 0,5^{3,75}$
$= 29,7$ (g)

Berechnung Endmenge nach 60 Tagen:
$W_n = W_0 \cdot 0,5^n$
$= 400 \cdot 0,5^{7,5}$
$= 2,2$ (g)

Berechnung prozentueller Anteil von W_0:
$p = \frac{P}{G}$
$= \frac{29,7}{400}$
$= 0,07425 \approx 7,4\%$

$p = \frac{P}{G}$
$= \frac{2,2}{400}$
$= 0,0055 = 0,55\%$

b) Berechnung Zeitspanne und Beobachtungszeiträume:
Halbwertszeit Plutonium-239: 24 000 Jahre
Zeitspanne: 30 000 Jahre
Beobachtungszeiträume: n = 30 000 : 24 000 = 1,25
Berechnung Endmenge:
$W_n = W_0 \cdot 0,5^n$
$= 23,79 \cdot 0,5^{1,25}$
≈ 10 (g)

c) Berechnung Zeitspanne und Beobachtungszeiträume:
Halbwertszeit Cäsium-137: 30 Jahre
Zeitspanne: 45 Jahre
Beobachtungszeiträume: n = 45 : 30 = 1,5
Berechnung Endmenge:
$W_n = W_0 \cdot 0{,}5^n$
$= 20 \cdot 0{,}5^{1{,}5}$
≈ 7 (g)

d) Berechnung Zeitspanne und Beobachtungszeiträume:
Halbwertszeit Plutonium-241: 13 Jahre
Zeitspanne: 65 Jahre
Beobachtungszeiträume: n = 65 : 13 = 5
Berechnung Endmenge:
$W_n = W_0 \cdot 0{,}5^n$
$= 1\,200 \cdot 0{,}5^5$
$= 37{,}5$ (g)

4 a)

	A	B	C
W_0	271,53 mg	■	180 mg
q	0,5	0,5	0,5
n	20 : 8 = 2,5	100 : 20 = 5	■
W_n	■	35 mg	11,25 mg

b) A $W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 271{,}53 \cdot 0{,}5^{2{,}5}$
$= 48$ (mg)

B $W_0 = \frac{W_n}{q^n}$
$= \frac{35}{0{,}5^5}$
$= 1\,120$ (mg)

C $n = \log_q \frac{W_n}{W_0}$
$= \log_{0{,}5} \frac{11{,}25}{180}$
$= 4$
Zeit: $4 \cdot 5 = 20$ (min)

5 a) Berechnung Zeitspanne und Beobachtungszeiträume:
Halbwertszeit Wasserstoff-3: 10 Tage
Zeitspanne: 7 Tage
Beobachtungszeiträume: n = 7 : 10 = 0,7
Berechnung Endmenge:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 20 \cdot 0{,}5^{0{,}7}$
$= 12{,}3$ (mg)

b) Berechnung Beobachtungszeiträume:
15 : 10 = 1,5
Berechnung Anfangswert:
$W_0 = \frac{W_n}{q^n}$
$= \frac{3}{0{,}5^{1{,}5}}$
$\approx 8{,}5$ (mg)

c) Berechnung Beobachtungszeiträume:
$n = \log_q \frac{W_n}{W_0}$
$= \log_{0{,}5} \frac{3{,}75}{30}$
$= 3$
Zeit: $3 \cdot 10$ Tage = 30 Tage

6 Beobachtungszeiträume bei 10% Restmenge:

$n = \log_q 0{,}1$

$= \log_{0,5} 0{,}1$

$\approx 3{,}3219$ (Beobachtungszeiträume)

Berechnung Zeitspanne:

$3{,}3219 \cdot 710$ Mio. $\approx 2{,}359$ Mrd. Jahre

Beobachtungszeiträume bei 5% Restmenge:

$n = \log_q 0{,}05$

$= \log_{0,5} 0{,}05$

$= 4{,}3219$ (Beobachtungszeiträume)

Berechnung Zeitspanne:

$4{,}3219 \cdot 710$ Mio. $\approx 3{,}069$ Mrd. Jahre

Beobachtungszeiträume bei 1% Restmenge:

$n = \log_q 0{,}01$

$= \log_{0,5} 0{,}01$

$= 6{,}6439$ Beobachtungszeiträume)

Berechnung Zeitspanne:

$6{,}6439 \cdot 710$ Mio. $\approx 4{,}717$ Mrd. Jahre

Information

1 Recherche im Internet

2

	a)	b)
Zeit (Jahre)	5 292	20 000
Beobachtungszeiträume	5 292 : 5 730 = 0,9236	20 000 : 5 730 = 3,49
Berechnung	$100 \cdot 0{,}5^{0,9236}$	$100 \cdot 0{,}5^{3,49}$
Aktivität	52,72%	8,9%

L

1 a) Formel für Zelle B7:
=B3*(B4)^B5

b)

	A	B
1	**Kapitalwachstum**	
2		
3	Anfangskapital K_0	20.000 €
4	Zinsfaktor (q)	1,015
5	Anzahl der Jahre (n)	7
6		
7	**Endkapital K_n**	22.196,90 €
8		

c) Ⓐ

	A	B
1	**Endwert (W_n)**	
2		
3	Anfangswert W_0	12.500
4	Wachstumsfaktor (q)	0,979
5	Beobachtungszeitraum (n)	4
6		
7	**Endwert (W_n)**	11.483
8		

Ⓑ

	A	B
1	**Radioaktiver Zerfall**	
2		
3	Anfangswert W_0	100
4	Wachstumsfaktor q	0,5
5	Anzahl der Beobachtungszeiträume n	4,5
6		
7	**Endwert W_n**	4,4
8		

2 a) B3: 80
B4: 0,5
B5: 5

	A	B
1	**Radioaktiver Zerfall**	
2		
3	Ausgangsmenge W_0	■
4	Wachstumsfaktor q	■
5	Endwert W_n	■
6		
7	**Anzahl der Beobachtungszeiträume n**	=log(B5/B3;B4)
8		

b) Mit dem Logarithmus $\frac{W_n}{W_0}$ wird der Exponent x zur Basis 0,5 berechnet:

$\log_{0,5} \frac{5}{80}$

c)

	A	B
1	**Radioaktiver Zerfall**	
2		
3	Ausgangsmenge W_0	80
4	Wachstumsfaktor q	0,5
5	Endwert W_n	5
6		
7	**Anzahl der Beobachtungszeiträume n**	4,0
8		

d) Ⓐ

	A	B
1	**Zeit (n)**	
2		
3	Anfangswert (W_0)	5.000,00
4	Wachstumsfaktor (q)	1,016
5	Endwert (W_n)	5.327,76
6		
7	**Beobachtungszeitraum (n)**	4,0
8		

Ⓑ

	A	B
1	**Zeit (n)**	
2		
3	Anfangswert (W_0)	522.000,00
4	Wachstumsfaktor (q)	1,04
5	Endwert (W_n)	1.044.000,00
6		
7	**Beobachtungszeitraum (n)**	17,7
8		

3 a)

	A	B
1	**Anfangswert (W_0)**	
2		
3	Endwert (W_n)	53.894,55
4	Wachstumsfaktor (q^n)	1,012
5	Beobachtungszeitraum (n)	3
6		
7	**Anfangswert (W_0)**	52.000,00
8		

b)

	A	B
1	**Wachstumsfaktor (q)**	
2		
3	Endwert (W_n)	2.689
4	Anfangswert (W_0)	500
5	Beobachtungszeitraum (n)	5
6		
7	**Wachstumsfaktor (q)**	1,4
8		

Gerade bei der Berechnung von Wachstumsprozessen bietet sich die Arbeit mit der Tabellenkalkulation an.
Mithilfe des Computers können auch Aufgaben mit schwierigerem Zahlenmaterial schnell gelöst werden.

Die wesentlichen Inhalte des Kapitels sind erarbeitet. Inwieweit sind die Lernenden darin fit? Wie unterschiedlich ist der Lernstand? Die Zwischenrunde bietet die Möglichkeit, das durch zwei Anforderungsniveaus differenziert zu erfassen. Auch die Lernenden können lernen, sich selbst einzuschätzen. Die Lösungen sind dazu im Buch angegeben. Ferner findet sich im Internet ein entsprechender Selbsteinschätzungsbogen. Unter Umständen müssen Inhalte nochmals aufgegriffen werden, um einen gesicherten Wissensstand zu erreichen.

L

1 Lineare und exponentielle Wachstumsprozesse vergleichen

a) Ⓐ
① Lineares Wachstum: In jeweils gleichen Abständen kommt immer die gleiche Menge (der gleiche Betrag) dazu.
② Exponentielles Wachstum: In jeweils gleichen Abschnitten nimmt die Menge (der gleiche Betrag) immer um denselben Faktor zu.
Ⓑ ① $y = 3x$ ② $y = 4^x$

b) Ⓐ

		x	1	2	3	4
Exponentielles Wachstum	①	y	5	25	125	625
Lineares Wachstum	②	y	5	10	15	20

Ⓑ ① $y = 5^x$ ② $y = 5x$

2 Größen bei einem Kapitalwachstum über mehrere Jahre berechnen

a) Berechnung Endwert:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 20\,000 \cdot 1{,}0105^5$
$= 21\,072{,}28$ (€)

b) Berechnung Anfangswert:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$22\,500 = W_0 \cdot 1{,}03^5 \quad | : 1{,}03^5$
$19\,408{,}70$ (€) $= W_0$

3 Größen bei der Bevölkerungsentwicklung berechnen

a) Berechnung Abnahmefaktor:
$q = 1 - p = 1 - 0{,}009 = 0{,}991$
Ⓐ Berechnung Einwohnerzahl Ende 2017
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 133\,539 \cdot 0{,}991^{10}$
$= 121\,996$ (Einwohner)
Ⓑ Berechnung Wachstumsfaktor:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$140\,000 = 121\,996 \cdot q^{10} \quad | : 121\,996$
$1{,}1476 = q^{10} \quad | \sqrt[10]{}$
$1{,}0139 \approx q$
Jährliche prozentuale Zunahme:
$p = q - 1$
$= 1{,}0139 - 1$
$= 0{,}0139 = 1{,}39\%$

b) Ⓐ Berechnung Wachstumsfaktor:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$81\,240 = 67\,279 \cdot q^{10}$
$1{,}2075 = q^{10} \quad | \sqrt[10]{}$
$1{,}019 = q$
Durchschnittliches jährliches Bevölkerungswachstum in Prozent:
$p = q - 1$
$= 1{,}019 - 1$
$= 0{,}019 = 1{,}9\%$
Ⓑ Verdoppelung der Einwohnerzahl:
$67\,279 \cdot 2 = 134\,558$ (Einwohner)
Verdoppelungszeit:
$W_n = W_0 \cdot q_n$
$134\,558 = 67\,279 \cdot 1{,}0375^n \quad | : 67\,279$
$2 = 1{,}0375^n$
$\frac{\log 2}{\log 1{,}0375} = n$
19 (Jahre) $\approx n$

4 Größen beim radioaktivem Zerfall berechnen

a) Ⓐ Berechnung Beobachtungszeiträume:

$30\text{ h} : 5\text{ h} = 6$

Berechnung Endwert:

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$= 200 \cdot 0{,}5^6$

$= 3{,}125\text{ (mg)}$

Ⓑ Berechnung Beobachtungszeiträume:

$20\text{ h} : 5\text{ h} = 4$

Berechnung Anfangswert:

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$15 = W_0 \cdot 0{,}5^4 \quad | : 0{,}5^4$

$240\text{ (mg)} = W_0$

b) Ⓐ Berechnung Beobachtungszeiträume:

$12{,}5\text{ h} : 5\text{ h} = 2{,}5$

Berechnung Anfangswert:

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$72{,}5 = W_0 \cdot 0{,}5^{2,5} \quad | : 0{,}5^{2,5}$

$410\text{ (mg)} \approx W_0$

Ⓑ Berechnung Beobachtungszeiträume:

$W_n = W_0 \cdot q^n$

$12{,}5 = 400 \cdot 0{,}5^n \quad | : 400$

$0{,}03125 = 0{,}5^n$

$\frac{\log 0{,}03125}{\log 0{,}5} = n$

$5 = n$

Berechnung Beobachtungszeit:

$5 \cdot 5\text{ h} = 25\text{ h}$

Z

Selbsteinschätzungsbogen

Erhältlich unter www.ccbuchner.de/medien (60014-02)

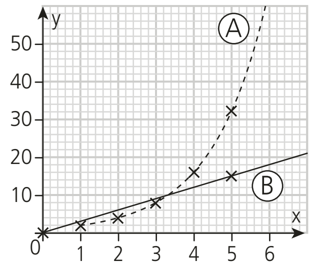
Üben und vertiefen

Diese beiden Seiten dienen dem Üben und Vertiefen der neuen Lerninhalte. Dabei sollen die Lernenden überwiegend eigenständig arbeiten. Um das zu ermöglichen, wird zum einen das Merkwissen „Auf einen Blick" nochmals in der linken Spalte zusammengefasst, zum anderen stehen die Lösungen am Ende des Buches zur Selbstkontrolle zur Verfügung.

L

1 a) Ⓐ Es liegt exponentielles Wachstum vor: In jeweils gleichen Abständen nimmt die Menge (der gleiche Betrag) immer um den gleichen Faktor zu.
Ⓑ Es liegt lineares Wachstum vor: In jeweils gleichen Abständen kommt immer die gleiche Menge (der gleiche Betrag) dazu.

b)



c) Ⓐ $y = 2^x$
Ⓑ $y = 3x$

2 a) Exponentielles Wachstum: Der Wachstumsfaktor beträgt 1,5.
b) Lineares Wachstum: Pro Jahr wächst der Tropfstein immer um 1,5 cm.
c) Lineare Abnahme: Der Futtervorrat nimmt in jedem Zeitintervall gleichmäßig um 400 kg ab.
d) Exponentielle Abnahme: Der Abnahmefaktor beträgt 0,5.

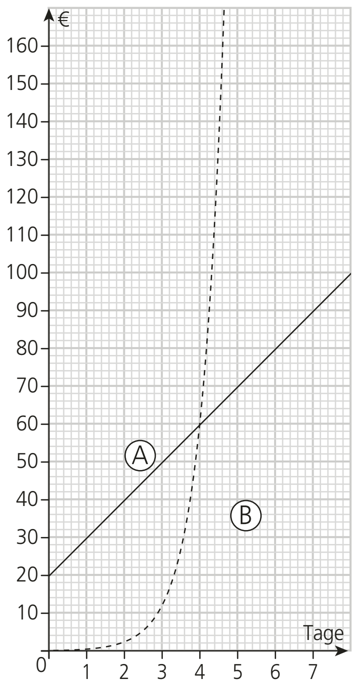
3 a) Ⓐ $y = 10 \cdot x + 20$

x (Tage)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y (€)	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ⓑ $y = 0{,}1 \cdot 5^x$

x (Tage)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y (€)	0,1	0,04	0,16	0,64	2,56	10,24	40,96	163,84	655,36

b)



4

	Halbwertszeit	Zeitspanne	Beobachtungszeiträume
a)	10 Jahre	50 Jahre	5
b)	18 Monate	3 Monate	6
c)	6 min	15 min	2,5

5 a) Guthaben nach zehn Jahren:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 25\,000 \cdot 1{,}0168^{10}$
$= 29\,532{,}17$ (€)

b) Geldbetrag Großeltern:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$1\,390{,}91 = W_0 \cdot 1{,}0185^{18} \quad | : 1{,}0185^{18}$
$1\,000$ (€) $= W_0$

c) Durchschnittliches prozentuales Wachstum pro Jahr:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$5\,320{,}41 = 5\,000 \cdot q^5 \quad | : 5\,000$
$1{,}064082 = q^5 \quad | \sqrt[5]{\;}$
$1{,}0125 = q$
$p = q - 1$
$p = 1{,}0125 - 1 = 0{,}0125 = 1{,}25\%$

d) Anlagezeit:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$48\,283{,}84 = 40\,000 \cdot 1{,}019^n \quad | : 40\,000$
$1{,}207096 = 1{,}019^n$
$\frac{\log 1{,}207096}{\log 1{,}019} = n$
10 (Jahre) $= n$

6 Durchschnittliche jährliche Zunahme von 2020 bis 2064:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$9{,}7 = 7{,}8 \cdot q^{44} \quad | : 7{,}8$
$1{,}2436... = q^{44} \quad | \sqrt[44]{\;}$
$1{,}00497 = q$
$p = q - 1$
$= 1{,}00497 - 1$
$= 0{,}00497 = 0{,}497\%$

Durchschnittliche jährliche Abnahme von 2064 bis 2100:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$8{,}8 = 9{,}7 \cdot q^{36} \quad | : 9{,}7$
$0{,}9072 ... = q^{36} \quad | \sqrt[36]{\;}$
$0{,}9973 \approx q$
$p = q - 1$
$= 0{,}9973 - 1$
$= 0{,}0027 = 0{,}27\%$

7 a) Aktuelle Einwohnerzahl:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$28\,690 = W_0 \cdot 1{,}0355 \quad | : 1{,}0355$
$24\,156 = W_0$

b) Doppelte Einwohnerzahl:

$24\,156 \cdot 2 = 48\,312$ (Einwohner)

Zeit bis zur Verdoppelung der Einwohnerzahl:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$48\,312 = 24\,156 \cdot 1{,}035^n \quad | : 24\,156$
$2 = 1{,}035^n$
$\frac{\log 2}{\log 1{,}035} = n$
20 (Jahre) $\approx n$

8 a) Zinsfaktor:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$10\,000 = 5\,000 \cdot q^{15} \quad | : 5000$
$2 = q^{15} \quad | \sqrt[15]{\;}$
$1{,}0473 \approx 5$

Zinssatz:

$p = q - 1$
$= 1{,}0473 - 1$
$= 0{,}0473 = 4{,}73\%$

b) Zinsfaktor:

$q = 1 + p$
$= 1 + 0{,}0155 = 1{,}0155$

Beobachtungszeitraum:

$10\,000 = 5\,000 \cdot 1{,}0155^n$
$2 = 1{,}0155^n$
$\frac{\log 2}{\log 1{,}0155} = n$
45 (Jahre) $= n$

c) Höhe angelegtes Kapital:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$10\,000 = W_0 \cdot 1{,}0155^{15} \quad | : 1{,}0155^{15}$
$7\,939{,}64$(€) $= W_0$

9 a) Anzahl Beobachtungszeiträume:

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$5 = 5\,120 \cdot 0{,}5^n \quad |:5\,120$$
$$0{,}0009765625 = 0{,}5^n$$
$$\frac{\log 0{,}0009765625}{\log 0{,}5} = n$$
$$10 = n$$

b) Halbwertszeit dieses radioaktiven Stoffes:

53 Jahre : 10 = 5,3 Jahre

Es handelt sich um das Element Cobalt-60.

10 a) Anzahl Beobachtungszeiträume:

10 Jahre : 5 Jahre = 2

Ursprünglich freigesetzte Menge Kobalt-60:

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$62{,}5 = W_0 \cdot 0{,}5^5 \quad |:0{,}5^5$$
$$250\ (g) = W_0$$

b) Anzahl Beobachtungszeiträume:

17 Jahre : 5 Jahre = 3,4

Endwert nach 17 Jahren:

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$= 62{,}5 \cdot 0{,}5^{3,4}$$
$$\approx 5{,}92\ (g)$$

c) Jährlicher Abbau in Prozent:

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$5{,}92 = 62{,}5 \cdot q^{17} \quad |:62{,}5$$
$$0{,}9472 = q^{17} \quad |\sqrt[17]{\ }$$
$$0{,}8705 = q$$
$$p = 1 - q$$
$$= 1 - 0{,}8705$$
$$= 0{,}1295 \approx 13\%$$

11 a)

	nach 2 h	nach 3 h	nach 4 h
Anzahl Beobachtungszeiträume	120 : 45 ≈ 2,67	180 : 45 = 4	240 : 45 ≈ 5,33
Funktionsgleichung	$y = 30 \cdot 2^{2,67}$	$y = 30 \cdot 2^4$	$y = 30 \cdot 2^{5,33}$
Anzahl Salmonellen	191	480	1 207

b)

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$10\,000 = 30 \cdot 2^n \quad |:30$$
$$333{,}33 = 2^n$$
$$\frac{\log 333{,}33}{\log 2} = n$$
$$8{,}38 = n$$

Zeitraum in Minuten:

45 min · 8,38 ≈ 377 min = 6 h 17 min

L

1 a) Lineares Wachstum

x	0	1	2	3	4
y	30	60	90	120	150

Exponentielles Wachstum

x	0	1	2	3	4
y	30	60	120	240	480

b) Lineares Wachstum: $y = 30 \cdot x + 30$

Exponentielles Wachstum: $y = 30 \cdot 2^x$

2 a) Exponentielles Wachstum: $q > 1$
b) Exponentielle Abnahme: $q < 1$
c) Exponentielle Abnahme: $q < 1$
d) Exponentielles Wachstum: $q > 1$

3 a) Berechnung Endwert:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 1\,800 \cdot 1{,}0119^{17}$
$= 2\,200{,}96$ (€)

b) Berechnung Beobachtungszeitraum:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$2\,300 = 1\,800 \cdot 1{,}0119^n \quad |:1\,800$
$1{,}2778 = 1{,}0119^n$
$\frac{\log 1{,}2778}{\log 1{,}0119} = n$
21 (Jahre) $\approx n$

c) Berechnung Zinsfaktor:

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$2\,300 = 1\,800 \cdot q^{17} \quad |:1\,800$
$1{,}2778 = q^{17} \quad |\sqrt[17]{}$
$1{,}01452 \approx q$

Berechnung Zinssatz:

$p = q - 1$
$= 1{,}01452 - 1$
$= 0{,}01452 = 1{,}452\%$

4 a) Startwert aus Diagramm: 2,5 Mio.
Beispiel Überprüfung mit Ablesen:
Umsatz nach vier Jahren: 3,9 Mio.
$W_n = 2{,}5 \cdot 1{,}12^4$
$\approx 3{,}9$ (Mio.)
Die rechnerische Lösung stimmt mit der grafischen Darstellung überein.

b) $y = 2{,}5 \cdot 1{,}12^x$

c) Umsatz des Unternehmens nach fünf Jahren:
$y = 2{,}5 \cdot 1{,}12^5$
$y = 4{,}4$ (Mio)
Bewertung: Da der Umsatz exponentiell ansteigt, ist das behauptete jährliche Umsatzwachstum bei zunehmender Zeit nicht realistisch.

5 a) Voraussichtliche Einwohnerzahl nach fünf Jahren:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 63\,500 \cdot 1{,}018^5$
$= 69\,424$ (Einwohner)
Voraussichtliche Einwohnerzahl nach weiteren vier Jahren:
$W_n = W_0 \cdot q^n$
$= 69\,424 \cdot 1{,}015^4$
$= 73\,684$ (Einwohner)

Die Abschlussrunde bietet die Möglichkeit, am Ende einer Einheit den Lernstand zu erheben und gegebenenfalls Maßnahmen zu ergreifen, um Defizite zu beheben. Sollte die Lehrkraft eine Testung unabhängig vom Schulbuch wünschen, stehen in click & teach Klassenarbeiten zur Verfügung.

b) Durchschnittliche Wachstumsrate pro Jahr:

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$74\,424 = 63\,500 \cdot q^{10} \quad |:63\,500$$
$$1{,}172 = q^{10} \quad |\sqrt[10]{}$$
$$1{,}016 \approx q$$
$$p = q - 1$$
$$= 1{,}016 - 1$$
$$= 0{,}016 = 1{,}6\%$$

6 Berechnung Beobachtungszeitraum:

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$6 = 0{,}8 \cdot 1{,}02^n \quad |:0{,}8$$
$$7{,}5 = 1{,}2^n$$
$$\frac{\log 7{,}5}{\log 1{,}2} = n$$
$$11 \text{ (Tage)} \approx n$$

7 a) Halbwertszeiten berechnen:

12 Jahre : 5 Jahre = 2,4

Endwert berechnen:

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$= 80 \cdot 0{,}5^{2{,}4}$$
$$\approx 15{,}2 \text{ (g)}$$

b) Berechnung Beobachtungszeitraum:

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$50 = 80 \cdot 0{,}5^n \quad |:80$$
$$0{,}625 = 0{,}5^n$$
$$\frac{\log 0{,}625}{\log 0{,}5} = n$$

0,678 (Halbwertszeiten) ≈ n

Zeitraum in Jahren:

$0{,}678 \cdot 5 \approx 3$ (Jahre)

c) Anzahl Halbwertszeiten:

20 : 5 = 4

Anfangswert:

$$W_n = W_0 \cdot q^n$$
$$30 = W_0 \cdot 0{,}5^4 \quad |:0{,}5^4$$
$$480 \text{ (g)} = W_0$$

L

Zahlen und Operationen

1 a) $5^3 \cdot 5^2 = 5^5$ b) $7^4 \cdot 8^4 = 56^4$ c) $9^5 : 9^3 = 9^2$
d) $4^8 : 5^8 = 0{,}8^8$ e) $10^4 : 5^4 = 2^4$ f) $(12^2)^3 = 12^6$

2 a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{20} = 20^{\frac{1}{3}}$ b) $\sqrt[3]{18} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt[8]{\sqrt[4]{4\,096}} = \sqrt[32]{4\,096} = 4\,096^{\frac{1}{32}}$

3 a) x steht für Anzahl der Doppeltische
y steht für Anzahl der Vierertische

b) C I $x + y = 25$
II $2x + 4y = 84$
$\Rightarrow$ I $x = 25 - y$
I in II:
$2\,(25 - y) + 4y = 84$
$50 - 2y + 4y = 84$
$50 + 2y = 84$
$\Rightarrow y = 17$

$y = 17$ in I:
$x + 17 = 25 \quad \Rightarrow x = 8$
Anzahl Doppeltische: 8
Anzahl Vierertische: 17

Raum und Form

1 a) rechtwinklige Dreiecke: ABF; BEF; ECD; ACG; GCD; AFG
gleichschenklige Dreiecke: BFE
b) stumpfwinkelige Dreiecke: BCK; GCE; ACH; GKE
c) ABCE = AABF
Begründung: Beide Dreiecke haben eine gleichlange Grundlinie und gleichlange Höhe.

2

rot angestrichene Flächen	0	1	2	3	4
Anzahl Teilwürfel	2	9	12	4	0

Größen und Messen

1

	a)	b)	c)
a	2,5cm	7,2 m	1,8 dm
c	0,9 cm	5,4 m	1,4 dm
h	2,8 cm	3,5 m	3,1 dm
A_T	4,76 cm^2	22,05 m^2	4,96 dm^2

2 $V_P = \frac{a + c}{2} \cdot h \cdot h_k$
$= \frac{25 + 40}{2} \cdot 30 \cdot 60$
$= 58\,500\ (cm^3)$

3 $357 = \frac{8{,}2 + 5{,}8}{2} \cdot 6{,}8 \cdot h_k$
$\Rightarrow 7{,}5\ (cm) = h_k$

Daten und Zufall

1 a)

	Minimum	Maximum	Spannweite	Arithmetisches Mittel	Median
Pierre	2:24	3:05	41 s	162 (2:42)	2:41
Karo	2:49	2:55	6 s	171 (2:51)	2:50
Imran	2:18	4:15	117 s	174 (2:54)	2:30
Julia	1:58	4:01	123 s	194 (3:14)	3:30

b) Pierre: $(161 + 170 + 144 + 185 + 150 + x) : 6 = 160$
$\Rightarrow x = 150$ (s) Zeit in der 6. Runde: 2:30
Karo: $(171 + 170 + 169 + 175 + 170 + x) : 6 = 170$
$\Rightarrow x = 165$ (s) Zeit in der 6. Runde: 2:45

Die Seiten „Kreuz und quer“ greifen im Sinne einer permanenten Wiederholung Lerninhalte früher behandelter Kapitel auf und sichern so nachhaltig Basiskompetenzen.