# Auszug Musterarbeitsblatt zum erhöhten Anforderungsniveau



Ph12 Lernbereich 2: Elektromagnetische Induktion und Schwingungen

Die Schülerinnen und Schüler erklären für den Idealfall der freien ungedämpften elektromagnetischen Schwingung das Zusammenwirken von Kondensator und Spule im Schwingkreis in Analogie zur mechanischen Schwingung und beschreiben Schwingungsvorgänge mithilfe von Diagrammen. Diese Analogiebetrachtungen setzen sie bei quantitativen Untersuchungen, unter anderem durch Energiebetrachtung und **die Beschreibung mithilfe von Differentialgleichungen, fort und reflektieren die Generalisierbarkeit dieser Modellierungen. Sie erkennen das lineare Kraftgesetz als Bedingung für die Entstehung einer mechanischen harmonischen Schwingung**.

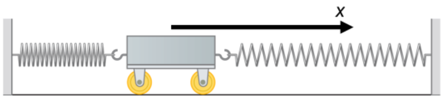
kurze Beschreibung der zu erlangenden Lehrplankompetenz

## Aufstellen der Differentialgleichungen

Ziel ist es, den elektromagnetischen Schwingkreis mathematisch zu modellieren, sodass alle physikalischen Größen bestimmt werden können. Die Analogie zur mechanischen Schwingung ist hier hilfreich, deswegen werden beide Schwingungssysteme nebeneinander dargestellt:

**Differentialgleichung einer freien ungedämpften…**

### mechanischen Schwingung




Die Abbildung zeigt einen Wagen zwischen zwei Federn. Wird der Wagen aus der Ruhelage in x-Richtung ausgelenkt und losgelassen, beginnt eine horizontale Schwingung. Diese Schwingung soll ohne Reibung („ungedämpft") betrachtet werden.

Die Ursache der Bewegung des Wagens ist die rücktreibende Kraft der Federn. Sie ist proportional zur Auslenkung, erhält aber ein Minuszeichen, weil sie entgegen der Auslenkungsrichtung wirkt:

$F_{Feder} = -D \cdot x(t)$ (**Hookesches Gesetz**)

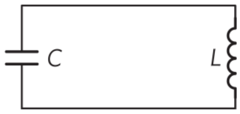
Die rücktreibende Kraft verursacht eine Beschleunigung des Wagens, welche von der Position x des Wagens abhängt. Da sich die Position des Wagens kontinuierlich mit der Zeit t ändert, ändert sich auch die Beschleunigung a(t) kontinuierlich mit der Zeit:

$\boldsymbol{F_{Wagen} = F_{Feder}}$

$m \cdot a(t) = -D \cdot x(t)$

$m \cdot a(t) + D \cdot x(t) = 0$ **(1a)**

### elektromagnetischen Schwingung




anschauliche Abbildungen

Die Abbildung zeigt einen geladenen Kondensator, der im nächsten Moment über eine Spule entladen wird. Es beginnt eine elektromagnetische Schwingung. Sie soll ohne Energieverlust, also ohne Widerstand („ungedämpft") betrachtet werden.

Die Summe der Spannungen $U_C$ und $U_L$ ist zu jedem Zeitpunkt der Schwingung null. Die Selbstinduktionsspannung der Spule erhält deshalb ein Minuszeichen:

$U_L = -L \cdot \dot{I}$.

ausführlicher Lehrtext

Die Kondensatorspannung verursacht einen Strom, dessen Stärke vom Wert der Spannung abhängt. Da sich die Spannung des Kondensators kontinuierlich ändert, ändert sich auch die Stromstärke durch die Spule kontinuierlich:

$\boldsymbol{U_C = U_L}$

$\frac{Q(t)}{C} = -L \cdot \dot{I}$

$L \cdot \dot{I} + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = 0$ **(1b)**

Definitionsgemäß gilt:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t) = \dot{v}$$

In Worten: Die Beschleunigungsfunktion ist also die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion.

Außerdem gilt:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}$$

In Worten: Die Geschwindigkeitsfunktion ist die Ableitung der Ortsfunktion.

Somit ergibt sich: $a = \dot{v} = \ddot{x}$. Eingesetzt in (1a):

$$m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = 0$$

kurze Merksätze

$$\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{D}{m} \cdot x = 0} \quad \textbf{(2a)}$$

Differentialgleichung der freien ungedämpften mechanischen Schwingung

Definitionsgemäß gilt:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = Q'(t) = \dot{Q}$$

In Worten: Die Stromstärkefunktion ist die Ableitung der Ladungsfunktion.

Außerdem gilt:

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} = \ddot{Q}$$

In Worten: Die 1. Ableitung der Stromstärkefunktion ist die zweite Ableitung der Ladungsfunktion.

Eingesetzt in (1b) folgt:

$$L \cdot \ddot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

$$\boldsymbol{\ddot{Q} + \frac{1}{LC} \cdot Q = 0} \quad \textbf{(2b)}$$

Differentialgleichung der freien ungedämpften elektromagnetischen Schwingung

Die Gleichungen (2a) und (2b) enthalten die Funktion $x(t)$ bzw. $Q(t)$ und jeweils ihre zweite Ableitung. Man nennt eine solche Gleichung **homogene Differentialgleichung 2. Ordnung**. Wenn man eine Funktion $x(t)$ bzw. $Q(t)$ findet, die eine Lösung für die Differentialgleichung ist, kann man zu jedem Zeitpunkt $t$ die Position $x$ des Wagens bzw. die Ladung $Q$ und Spannung $U_C$ des Kondensators bestimmen – das ist das Ziel.

## Lösungsweg

### mechanische Schwingung

Zunächst wird die Differentialgleichung etwas umgeschrieben:

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m} \cdot x \quad \textbf{(3a)}$$

Man sieht, dass die zweite Ableitung von $x$ bis auf einen negativen Vorfaktor wieder mit der ursprünglichen Funktion von $x$ übereinstimmen muss. Mathematisch ist dies bei der Sinus- oder Kosinusfunktion der Fall. Für die Differentialgleichung verwenden wir also folgenden

Lösungsansatz: $\boldsymbol{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)}$ **(4a)**

mit…

$x_0$ = Amplitude = maximale Auslenkung
Kreisfrequenz $\omega$ ·Zeit $t$ = Winkel $\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t$

### elektromagnetische Schwingung

Zunächst wird die Differentialgleichung etwas umgeschrieben:

$$\ddot{Q} = -\frac{1}{LC} \cdot Q \quad \textbf{(3b)}$$

Man sieht, dass die zweite Ableitung von $Q$ bis auf einen negativen Vorfaktor wieder mit der ursprünglichen Funktion von $Q$ übereinstimmen muss. Mathematisch ist dies bei der Sinus- oder Kosinusfunktion der Fall. Für die Differentialgleichung verwenden wir also folgenden

Lösungsansatz: $\boldsymbol{Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)}$ **(4b)**

mit…

$Q_0$ = Amplitude = maximale Ladung
Kreisfrequenz $\omega$ · Zeit $t$ = Winkel $\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t$

## A Arbeitsaufträge

umfangreiches Aufgabenmaterial

**1** Die Differentialgleichung **(2b)** wurde über den Spannungsansatz $U_L = U_C$ gewonnen. Eine alternative Herleitung geht vom Energieansatz aus: $\frac{1}{2}CU^2 + \frac{1}{2}LI^2 = const.$
Leiten Sie diese Gleichung nach der Zeit ab (Kettenregel beachten!) und zeigen Sie, dass das Ergebnis ebenfalls zur Differentialgleichung **(2b)** führt.

**2** Ein idealer Schwingkreis, der aus der Kapazität $C = 44\,\text{pF}$ und der Induktivität $L = 3{,}0\,\mu\text{H}$ besteht, schwingt ungedämpft. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Kondensator vollständig geladen, die Spannung beträgt dann 12 V.

**a)** Berechnen Sie die Schwingungsdauer $T$. [Kontrollergebnis: $T = 7{,}2 \cdot 10^{-8}\,\text{s}$]

**b)** Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Kondensator erstmals vollständig entladen ist. Bestimmen Sie die Stromstärke $I$ zu diesem Zeitpunkt [Kontrollergebnis: $t = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\,\text{s}$].

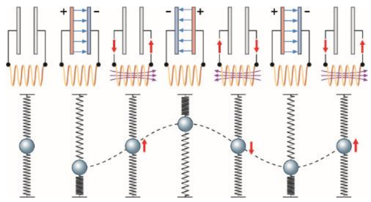
**c)** Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung und der Stromstärke innerhalb einer Schwingungsdauer.

**3** Bei der mechanischen Schwingung muss die Rückstellkraft durch eine lineare Funktion beschrieben werden, damit die Schwingung „harmonisch“ genannt werden kann.

**a)** Begründen Sie dies.

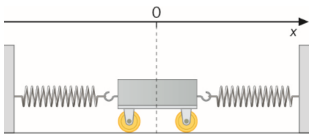
**b)** Suchen Sie Beispiele verschiedener Schwingungen und begründen Sie, ob es sich um harmonische oder nichtharmonische Schwingungen handelt.

**4** Erstellen Sie tabellarisch eine Gegenüberstellung von korrespondierenden Größen der mechanischen und der elektromagnetischen Schwingung. Diskutieren Sie, ob man ausgehend von der Differentialgleichung der freien ungedämpften mechanischen Schwingung eine Differentialgleichung der elektromagnetischen Schwingung aufstellen kann, wenn man sich allein der Analogien zwischen diesen Schwingungssystemen bedient. Entscheiden Sie, ob dieses Verfahren auch für andere Schwingungsarten geeignet ist.



**5** Setzen Sie den zeitlichen Verlauf der potentiellen und kinetischen Energie eines vertikalen Federpendels in Beziehung zu den entsprechenden Energiekurven des Schwingkreises (vgl. Abbildung rechts).

**6** Ein Wagen ($m = 2{,}00\,\text{kg}$) bildet mit zwei Federn, die jeweils die Federhärte $D_1 = 16{,}0\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ besitzen, ein horizontales Pendel. Beide Federn sind 5,0 cm von der Gleichgewichtslage ausgelenkt. Die nun einsetzende Schwingung sei ungedämpft.




**a)** Zeigen Sie, dass die Federhärte des Schwingungssystems $D = 2 \cdot D_1$ ist.

**b)** Bestimmen Sie die Kreisfrequenz $\omega$ der Schwingung.

**c)** Stellen Sie die Differentialgleichung auf, die das Schwingungssystem beschreibt und geben Sie eine allgemeine Lösung $x(t)$ an.

**d)** Spezialisieren Sie diese Lösung für die folgenden Anfangsbedingungen: Zur Zeit $t = 0$ sei der Wagen am Ort $x_0 = +2{,}0\,\text{cm}$ und habe die Geschwindigkeit $v_0 = +8{,}0\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

**e)** Der Wagen wird nun um $x_0 = 5{,}0\,\text{cm}$ ausgelenkt und losgelassen. Die Spannenergie wird durch die Funktion $E_{\text{Spann}} = \frac{1}{2}Dx^2$ beschrieben. Zeichnen Sie mithilfe eines digitalen Tools diese Funktion für den Bereich.

**f)** Geben Sie allgemein die kinetische Energie $E_{\text{kin}}$ als Funktion von $x$ an.

ausführliche Lösungen

## A Lösungen

**1** $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cdot L\cdot[I(t)]^2+\frac{1}{2}\cdot C\cdot[U_c(t)]^2\right)=0$

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot L\cdot I\cdot \dot{I}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot C\cdot U_C\cdot \dot{U}_C=0 \Rightarrow L\cdot I\cdot \dot{I}+C\cdot U_C\cdot \dot{U}_C=0$

aus $Q=CU$ folgt $\dot{Q}=C\dot{U}$ und aus $I=\dot{Q}$ folgt $\dot{I}=\ddot{Q}$

$\Rightarrow L\cdot\dot{Q}\cdot\ddot{Q}+C\cdot\frac{Q}{C}\cdot\frac{\dot{Q}}{C}=0 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}\cdot\left(L\cdot\ddot{Q}+\frac{Q}{C}\right)=0$

Diese Gleichung ist null, wenn $\dot{Q}=0$ oder $L\cdot\ddot{Q}+\frac{Q}{C}=0 \Rightarrow \ddot{Q}+\frac{1}{LC}\cdot Q=0$

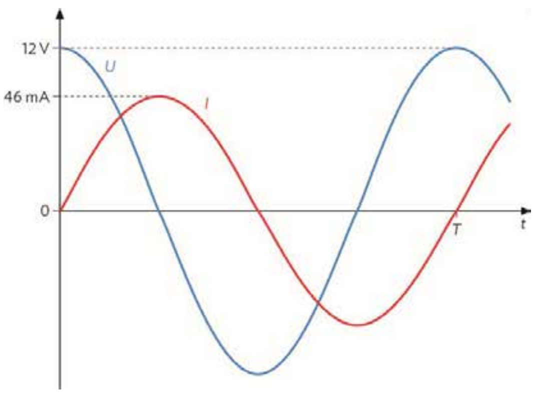
**2**

**a)** $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}\Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{3{,}0\cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{A}}\cdot 44\cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{A\cdot s}}{\mathrm{V}}}=7{,}2\cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$

**b)** $\frac{T}{4}=1{,}8\cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$

$\frac{1}{2}\cdot L\cdot {I_{\max}}^2=\frac{1}{2}\cdot C\cdot {U_{\max}}^2 \Leftrightarrow I_{\max}=U_{\max}\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\Rightarrow I_{\max}=12\ \mathrm{V}\cdot\sqrt{\frac{44\cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{A\cdot s}}{\mathrm{V}}}{3{,}0\cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{A}}}}=46\ \mathrm{mA}$

**c)**




**3**

**a)** Wenn sich periodisch veränderliche Größen durch Sinus- bzw. Kosinusfunktionen beschreiben lassen, spricht man von einer „harmonischen Schwingung". Die rücktreibende Kraft auf den schwingenden Körper wird durch ein lineares Kraftgesetz beschrieben ($F\ =\ -D\cdot x$), was dazu führt, dass alle Bewegungsgrößen $(x, v, a)$ sinus- bzw. kosinusartig sind. So lässt sich sagen, dass ein lineares Kraftgesetz die Bedingung für eine harmonische Schwingung ist.

**b)** Beispiele für harmonische und nichtharmonische Schwingungen:

| Harmonische Schwingungen | Nichtharmonische Schwingungen |
|---|---|
| • Federpendel ($F\ =\ -Dx$)<br>• Fadenpendel für kleine Auslenkungen ($F=-\left(\frac{x}{l}\right)\cdot \mathrm{mg}$)<br>• Schwingende Flüssigkeit im U-Rohr ($F\propto\ -y$) | • Alle gedämpften Schwingungen (z. B. alle Schwingungen mit (Luft-)Reibung)<br>• Fadenpendel für größere Auslenkungen (z. B. Schaukel)<br>• Stabpendel (etwa Uhrenpendel)<br>• Kugel auf Knickbahn |